9. Übung zur Relativistischen Quantenmechanik (SS 2000)

Prof. G. Roepstorff

Aufgabe 23: Klein-Gordon-Feld 12 Punkte

Auf dem Raum der Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung ist durch

$$(\Phi,\Psi) = i\int d^3x\ (\Phi^*(t,\mathbf{x})\partial_t\Psi(t,\mathbf{x}) - (\partial_t\Phi^*(t,\mathbf{x}))\Psi(t,\mathbf{x})) \tag{1}$$

ein inneres Produkt definiert.

(a) Zeigen Sie, daß dieses innere Produkt bezüglich der durch die Klein-Gordon-Gleichung definierten Zeitentwicklung erhalten ist.

(b) Betrachten Sie die durch ebene Wellen gegebenen Lösungen

$$f_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}2\omega}e^{\mp i(\omega t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\ ,\quad \omega = +\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}\ . \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß diese Lösungen bezüglich des oben definierten inneren Produktes ein Orthogonalsystem bilden und untersuchen Sie die durch (1) definierte Norm dieser Lösungen.

(c) Ein quantisiertes Klein-Gordon-Feld sei durch

$$\Phi(t,\mathbf{x}) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2\omega}\left(a(\mathbf{p})e^{-i(\omega t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{i(\omega t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\right)$$

gegeben. Finden Sie mit Hilfe von (1) und (2) eine Darstellung der Operatoren $a(\mathbf{p})$ und $a^\dagger(\mathbf{p})$ und benutzen Sie diese sowie die kanonische Kommutatorrelation

$$[\Phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

zur Berechnung der Vertauschungsrelationen $[a(\mathbf{p}),a^\dagger(\mathbf{p}')]$, $[a(\mathbf{p}),a(\mathbf{p}')]$ sowie $[a^\dagger(\mathbf{p}),a^\dagger(\mathbf{p}')]$

(d) Zeigen Sie, daß der in der Vorlesung definierte Energie-Impuls-Operator P^μ für ein Skalarfeld durch den Ausdruck

$$P^\mu = \int d^3x\ \left(\pi(x)\partial^\mu\Phi(x) - g^{\mu 0}\mathcal{L}\right)$$

dargestellt werden kann. Verifizieren Sie hierzu mit Hilfe von (c) die in Formel (316) der Vorlesung angegebenen Kommutatorrelationen.

(e) Zeigen Sie die Vertauschungsrelation

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = i\Delta(x - y)$$

und diskutieren Sie das Verhalten dieses Kommutators für raumartige und zeitartige Abstände.

Abgabe und Besprechung: In der nächsten Übungsstunde