

Kapitel 16

Spezielle Relativitätstheorie

Ende des vorigen Jahrhunderts zeigt sich, daß gewisse elektromagnetische und optische Phänomene nicht mit den Voraussagen der in Kapitel 2 behandelten speziellen Galilei-Transformationen in Einklang gebracht werden konnten (s. z.B. das Skriptum zur Vorlesung "Spezielle Relativitätstheorie", WS 1997/98, von M. Rinke sowie die weitere am Ende dieses Kapitels angegebene Literatur). Insbesondere das überraschende Ergebnis von Michelson und Morley, daß der Wert der Lichtgeschwindigkeit c in verschiedenen Inertialsystemen, die sich mit der Geschwindigkeit \vec{u} relativ zueinander bewegen, *denselben* Wert hat, war mit der Galileischen Vektoraddition von Geschwindigkeiten nicht vereinbar.

Der entscheidende Durchbruch bei diesen Schwierigkeiten kam im Jahre 1905 als Einstein und Poincaré etwa gleichzeitig vorschlugen, daß bei Geschwindigkeiten, die nicht wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, an die Stelle der speziellen Galilei-Transformationen die von Lorentz schon vorher als Symmetrietransformation der Maxwell'schen Gleichungen gefundene "spezielle Lorentz-Transformation" treten solle. Während die Argumentation von Poincaré im wesentlichen mathematisch war, hatte Einstein zusätzlich klar erkannt, daß den Lorentz-Transformationen ein neues Konzept von Raum und Zeit zugrundeliegt und daß die Newton'sche Vorstellung einer absoluten Zeit unabhängig von allen Inertialsystemen modifiziert werden mußte. Die Grundannahmen Einsteins lassen sich in folgenden Postulaten zusammenfassen:

1. Die Geometrie des 3-dimensionalen Raumes ist weiterhin euklidisch.
2. Es gibt **Inertialsysteme**, d.h. Systeme, in denen die Bahnen kräftefreier Teilchen Geraden sind und in jedem solchen System ein Zeitmaß, so daß ein kräftefreies Teilchen in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurücklegt (s. Kap. 2). In einem vorgegebenen Inertialsystem $I(\vec{e}_i, i = 1, 2, 3; e_t)$ werden Ereignisse E ein-eindeutig durch 4-tupel $(x_1, x_2, x_3, t) \equiv (\vec{x}, t)$, $x_i, t \in \mathbf{R}$, charakterisiert.
3. **Relativitätsprinzip**: Alle Inertialsysteme sind *physikalisch* - d.h. nicht nur mechanisch - äquivalent.
4. Die **Lichtgeschwindigkeit** hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert c .

Nicht mehr gefordert wird die Existenz einer absoluten Gleichzeitigkeit für alle Inertialsysteme!

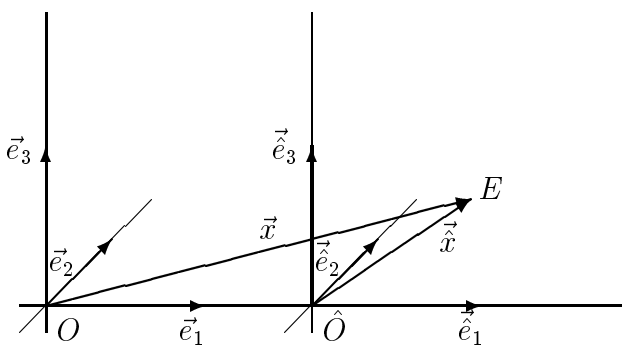
Das 4. Postulat erlaubt die Definition von *Gleichzeitigkeit* in *ein und demselben* Inertialsystem I : 2 "Ereignisse" E_1 und E_2 , die - von I aus gesehen - an den Punkten P_1 und P_2 zu den Zeitpunkten T_1 und T_2 stattfinden, sind **gleichzeitig**, falls zwei zu den Zeitpunkten T_1 und T_2 emittierte Lichtblitze sich in der Mitte M zwischen P_1 und P_2 treffen. Mit dieser Vorschrift lassen sich - im Prinzip - alle Uhren innerhalb eines Inertialsystems synchronisieren. Die wesentliche Frage ist dann, wie Zeiten und Koordinaten in *verschiedenen* Inertialsystemen zu vergleichen sind.

16.1 Spezielle Lorentz-Transformationen

Es seien $I(\vec{e}_i, e_t; O)$ und $\hat{I}(\hat{e}_i, \hat{e}_t; \hat{O})$ zwei zunächst beliebige Inertialsysteme, die dieselben Längen- und Zeiteinheiten benutzen und Ereignisse E mit den 4-tupeln (\vec{x}, t) bzw. (\hat{x}, \hat{t}) beschreiben. Die Frage ist dann, wie die Koordinaten (\vec{x}, t) und (\hat{x}, \hat{t}) ein und desselben Ereignisses miteinander zusammenhängen. Diese Frage soll zunächst für den folgenden wichtigen Spezialfall beantwortet werden:

16.1.1 Herleitung der speziell. Lorentz-Transformationen

Das System \hat{I} bewege sich gegenüber I in x_1 -Richtung mit der Geschwindigkeit u , wobei die "1"-Achsen beider Systeme und die Ebenen $x_2 = 0$ und $\hat{x}_2 = 0$ sowie $x_3 = 0$ und $\hat{x}_3 = 0$ zusammenfallen sollen. Ferner seien die Zeit-Nullpunkte so gewählt, daß $\hat{t} = t$ für $\hat{O} = O$.



Zunächst soll begründet werden, daß sich das System I von \hat{I} aus gesehen mit der Geschwindigkeit $-u$ längs der \hat{e}_1 -Achse bewegt, falls \hat{I} sich von I aus gesehen mit der Geschwindigkeit u längs der \vec{e}_1 -Achse bewegt. Zur Begründung benutzen wir ein Argument, kurz "(1,3)-Inversion" genannt, das in den folgenden Überlegungen häufiger benutzt wird:

Kehren wir in beiden Systemen die Richtungen der 1- und 3-Achsen um, so sind in allen Formeln die Vorzeichen der Koordinaten x_1, x_3 bzw. \hat{x}_1, \hat{x}_3 umzukehren. Zu diesen rein mathematischen Konsequenzen kommt die physikalische, daß durch

diese (1,3)-Inversion die Rollen der beiden Systeme vertauscht werden: Das System I bewegt sich relativ zu \hat{I} nun in Richtung der *positiven* $\hat{1}$ -Achse, während sich das System \hat{I} relativ zu I in Richtung der *negativen* 1-Achse bewegt. Wegen der *physikalischen* Äquivalenz der beiden Inertialsysteme müssen daher alle Beziehungen, die vor der Inversion zwischen den Koordinaten (\vec{x}, t) galten, nach der Inversion für die Koordinaten $(\vec{\hat{x}}, \hat{t})$ gelten und umgekehrt. Aus der Kombination der Formeln, die aus der mathematischen Inversion folgen, mit denen, die sich aus der physikalischen Äquivalenz ergeben, lassen sich dann häufig wichtige Schlüsse ziehen.

Angewandt auf die Relativgeschwindigkeiten der beiden Inertialsysteme ergibt die (1,3)-Inversion Folgendes: Nehmen wir zunächst an, daß die Geschwindigkeit von \hat{I} in I den Wert $u = dx_1/dt$ und die Geschwindigkeit von I in \hat{I} den Wert $\hat{u} = d\hat{x}_1/d\hat{t}$ habe. Die mathematische (1,3)-Inversion bedeutet $u \rightarrow -u, \hat{u} \rightarrow -\hat{u}$ während die zugehörige physikalische Äquivalenz den gleichzeitigen Austausch $u \leftrightarrow \hat{u}$ impliziert. Dies bedeutet, daß die Beziehungen $-u = \hat{u}$ und $-\hat{u} = u$ gelten müssen.

Aus den Postulaten 2 und 3 folgt weiter, daß der Zusammenhang zwischen den Koordinaten x_i, t und \hat{x}_i, \hat{t} linear sein muß, da eine Geradengleichung der Form $\vec{x} = \vec{v}t + \vec{a}$ in eine der Form $\vec{\hat{x}} = \vec{\hat{v}}\hat{t} + \vec{\hat{a}}$ überzugehen hat. Die allgemeinsten Transformationen, die Geraden in Geraden überführen, sind die gebrochen linearen (projektiven)

$$\hat{x}_1 = \frac{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{10} t + a_1}{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_0 t + b}, \quad \hat{x}_2 = \dots$$

Sie haben in ihrer allgemeinen Form jedoch zur Folge, daß Punkte einer Geraden in I - nämlich die, für die der Nenner verschwindet, im System \hat{I} unendliche Koordinaten haben würden. Wenn aber endliche Koordinaten in endliche Koordinaten übergehen sollen, so bleiben zunächst nur affine Transformationen, für die der Nenner den Wert 1 hat.

Da aus der Ebenengleichung $x_2 = 0$ die Gleichung $\hat{x}_2 = 0$ folgen muß, so gilt

$$\hat{x}_2 = k x_2, \quad k > 0.$$

Die (1,3)-Inversion führt zu $x_2 = k \hat{x}_2$, also gilt $k = 1$. Entsprechend impliziert das gleichzeitige Bestehen der Ebenengleichungen $x_3 = 0$ und $\hat{x}_3 = 0$ die Beziehung $\hat{x}_3 = k x_3$. Auch hier liefert die (1,3)-Inversion wieder $k = 1$. Es gilt also

$$\boxed{\hat{x}_2 = x_2, \quad \hat{x}_3 = x_3.}$$

Da ferner aus $x_1(t) = ut$ die Gleichung $\hat{x}_1 = 0$ für den Ursprung des Systems \hat{I} folgen soll, so muß

$$\hat{x}_1 = \gamma(u) (x_1 - ut), \quad \gamma(u) > 0,$$

sein. Die Eigenschaft $\gamma(u) > 0$ folgt daraus, daß die 1-Achse und die $\hat{1}$ -Achse die gleiche Richtung haben. Analoge Argumente ergeben für die Umkehrtransformation

$$x_1 = \hat{\gamma}(u) (\hat{x}_1 + u \hat{t}), \quad \hat{\gamma} > 0.$$

Die (1,3)-Inversion führt wegen $x_1 \rightarrow -x_1, \hat{x}_1 \rightarrow -\hat{x}_1, u \rightarrow -u$ mathematisch zu

$$\hat{x}_1 = \gamma(x_1 - u t),$$

während wegen der oben beschriebenen physikalischen Äquivalenz die Beziehung $x_1 = \hat{\gamma}(\hat{x}_1 + u \hat{t})$ die Relation

$$\hat{x}_1 = \hat{\gamma}(x_1 - u t)$$

impliziert, d.h. es gilt

$$\hat{\gamma}(u) = \gamma(u).$$

Wegen der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen muß aus $x_1 = c t$ die Beziehung $\hat{x}_1 = c \hat{t}$ folgen. Eingesetzt in die obigen Ausdrücke ergibt dies

$$c \hat{t} = \gamma t (c - u), \quad c t = \gamma \hat{t} (c + u),$$

also

$$\boxed{\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}.$$

Eliminieren wir schließlich noch \hat{x}_1 aus den Formeln $\hat{x}_1 = \gamma(x_1 - u t)$, $x_1 = \gamma(\hat{x}_1 + u \hat{t})$, so bekommen wir

$$\hat{t} = \gamma(u) \left(t - \frac{u x_1}{c^2} \right).$$

Damit haben wir die **speziellen Lorentz-Transformationen** hergeleitet, die die Koordinaten (\vec{x}, t) und $(\vec{\hat{x}}, \hat{t})$ ein und desselben Ereignisses E miteinander verknüpften, mit denen dies Ereignis von zwei verschiedenen Inertialsystemen I und \hat{I} aus beschrieben wird, wobei sich das System \hat{I} gegenüber I mit der Geschwindigkeit u längs der 1-Achse bewegt:

$$\boxed{\hat{x}_1 = \gamma(u) (x_1 - u t), \quad \hat{x}_2 = x_2, \quad \hat{x}_3 = x_3, \quad \hat{t} = \gamma(u) \left(t - \frac{u x_1}{c^2} \right)}.$$

Die Umkehrung dieser Transformationen ergibt sich unmittelbar aus den Substitutionen $u \rightarrow -u, (\vec{\hat{x}}, \hat{t}) \leftrightarrow (\vec{x}, t)$:

$$\boxed{x_1 = \gamma(u) (\hat{x}_1 + u \hat{t}), \quad x_2 = \hat{x}_2, \quad x_3 = \hat{x}_3, \quad t = \gamma(u) \left(\hat{t} + \frac{u \hat{x}_1}{c^2} \right)}.$$

Für $|u| \ll c$ und $u x_1 \ll c^2 t$ bekommen wir

$$\hat{x}_1 \approx x_1 - u t, \quad \hat{t} \approx t,$$

d.h. für Geschwindigkeiten u , die wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, gehen die speziellen Lorentz-Transformationen in die speziellen Galilei-Transformationen über!

Andererseits sieht man, daß der Faktor $\gamma(u)$ imaginär, d.h. unphysikalisch wird, falls $|u| > c$. Dies bedeutet, daß Relativgeschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit zwischen physikalischen Systemen nicht möglich sind!

16.1.2 Minkowski-Raum und Eigenzeit

Die obigen Formeln für die Lorentz-Transformationen lassen sich symmetrischer schreiben, wenn man die Variablen

$$x^0 = ct, \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad -1 \leq \beta \leq +1$$

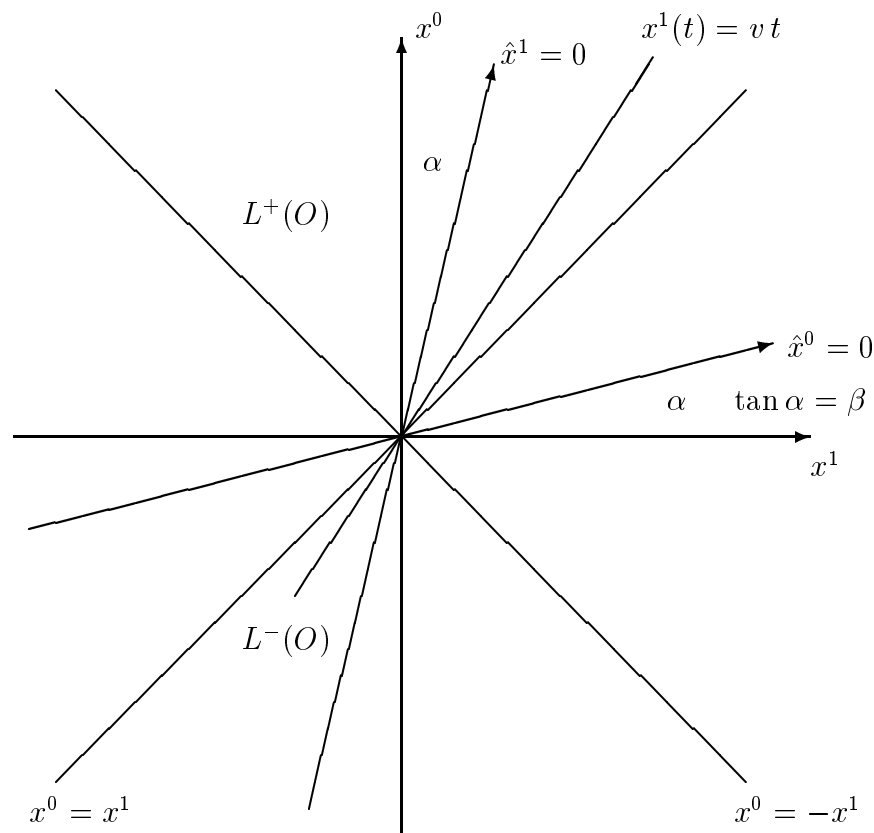
eingführt. Aus Gründen, die erst später deutlich werden, ist es ferner zweckmäßig, für die Komponenten des Ortsvektors \vec{x} die Notation x^i anstelle von $x_i, i = 1, 2, 3$, zu benutzen. Die Lorentz-Transformationen lauten dann

$$\hat{x}^1 = \gamma(\beta)(x^1 - \beta x^0), \quad \hat{x}^i = x^i, \quad i = 2, 3, \quad \hat{x}^0 = \gamma(\beta)(x^0 - \beta x^1), \quad \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

mit den entsprechenden Formeln für die Umkehrtransformation. Den Raum

$$M^4 = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3)\}$$

bezeichnet man als **Minkowski-Raum**. Eigenschaften dieses Raumes kann man sich gut anhand des folgenden **Minkowski-Diagrammes** veranschaulichen:



Die Gleichung $\hat{x}^0 = 0$ der Hyperebene, der im System \hat{I} die Gesamtheit aller Ereignisse entspricht, die zur Zeit $\hat{t} = 0$ stattfinden, hat im System I die Form $x^0 = \beta x^1$

und man sieht anschaulich, daß die Ereignisse, die in \hat{I} gleichzeitig sind - d.h. in Hyperebenen mit den Gleichungen $\hat{x}^0 = \text{const.}$ liegen, in I nicht mehr gleichzeitig sein können.

Die Menge der Punkte

$$L^+(O) = \{x : (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \geq 0, x^0 > 0\}$$

bezeichnet man als **vorderen Lichtkegel** des Ursprunges O und die Punktmenge

$$L^-(O) = \{x : (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \geq 0, x^0 < 0\}$$

entsprechend als **hinteren Lichtkegel** des Ursprunges.

Da physikalische Signale sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen, kann der Ursprung O nur durch Ereignisse beeinflusst werden, die in $L^-(O)$ liegen; von O aus können andererseits nur Ereignisse in $L^+(O)$ beeinflusst werden, während Ereignisse in $M^4 - L^+(O)$ nicht beeinflussbar sind (sog. **Einstein-Kausalität**). Man nennt Ereignisse, die in $L^-(O) \cup L^+(O)$ liegen, **relativ zeitartig** zu O und solche aus $M^4 \setminus L^-(O) \cup L^+(O)$ **relativ raumartig** zu O .

Die zur Bewegungsgleichung $x^1 = vt$ eines kräftefreien Teilchens gehörige Gerade kann wegen $|v| \leq c$ nur im hinteren und vorderen Lichtkegel von O liegen.

Die hier speziell für den Punkt O eingeführten Begriffe wie "hinterer und vorderer Lichtkegel, relativ zeitartig und raumartig" lassen sich offensichtlich durch geeignete Raum-Zeit-Translationen auf beliebige Punkte P übertragen.

Führen wir noch die "**Schnelligkeit**" oder "**Rapidity**" χ durch die Definition

$$\boxed{\cosh \chi = \gamma(\beta)}$$

ein, so folgt wegen $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$, daß

$$\sinh \chi = \beta \gamma, \quad \beta = \tanh \chi,$$

also

$$\boxed{\chi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)}.$$

Mit Hilfe der Rapidity erhalten wir für die Lorentz-Transformationen die Form

$$\boxed{\hat{x}^1 = x^1 \cosh \chi - x^0 \sinh \chi, \quad \hat{x}^0 = x^0 \cosh \chi - x^1 \sinh \chi.}$$

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen $x \rightarrow \hat{x} \rightarrow \hat{\hat{x}}$ mit den "reduzierten" Geschwindigkeiten β_1 und β_2 sowie den zugehörigen Rapidityen χ_1 und χ_2 nacheinander aus, so folgt aus den Relationen

$$\begin{aligned} \cosh(\chi_1 + \chi_2) &= \cosh \chi_1 \cosh \chi_2 + \sinh \chi_1 \sinh \chi_2, \\ \sinh(\chi_1 + \chi_2) &= \cosh \chi_1 \sinh \chi_2 + \sinh \chi_1 \cosh \chi_2 \end{aligned}$$

für das $\chi_3 = \chi_3(\chi_1, \chi_2)$ der zusammengesetzten speziellen Lorentz-Transformation $x \rightarrow \hat{\hat{x}}$:

$$\boxed{\chi_3 = \chi_1 + \chi_2.}$$

Wie der Winkel ϕ bei räumlichen Drehungen um eine feste Achse so ist auch die Rapidität χ bei speziellen Lorentz-Transformationen bezüglich einer festen Richtung additiv!

Wegen

$$\tanh(\chi_1 + \chi_2) = \frac{\tanh \chi_1 + \tanh \chi_2}{1 + \tanh \chi_1 \tanh \chi_2}$$

folgt dann

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

Analog zur Invarianz von $(x^2)^2 + (x^3)^2$ bei Drehungen um die 3-Achse gilt für die obigen speziellen Lorentz-Transformationen

$$(\hat{x}^0)^2 - (\hat{x}^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2.$$

Sind x_1 und x_2 die Raum-Zeit-Koordinaten von 2 Ereignissen E_1 und E_2 , so gilt offenbar auch für die Relativkoordinaten

$$\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

daß

$$\Delta \hat{x}^0 = \Delta x^0 \cosh \chi - \Delta x^1 \sinh \chi, \quad \Delta \hat{x}^1 = \Delta x^1 \cosh \chi - \Delta x^0 \sinh \chi$$

und $\Delta \hat{x}^i = \Delta x^i, i = 2, 3$. Aus diesen Relationen folgt daß die **Größe**

$$c^2(\Delta\tau)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$$

in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat!

Für ein Teilchen, das im System I ruht, gilt $\Delta x^i = 0, i = 1, 2, 3$, also ist jetzt $\Delta\tau = \Delta t$. Man bezeichnet deswegen die Variable τ auch als **Eigenzeit des Teilchens**. Die Eigenzeitintervalle $\Delta\tau$ haben in allen Inertialsystemen denselben Wert. Sie treten an die Stelle der Newtonschen absoluten Zeit!

16.1.3 Anwendungen der Lorentz-Transformationen

Zu den wichtigsten Anwendungen der Lorentz-Transformationen gehören die Änderungen von Zeit- und Längenintervallen beim Übergang vom ruhenden zum bewegten System und umgekehrt: Es seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse, die in I bzw. \hat{I} mittels der Raum-Zeit-Koordinaten x bzw. \hat{x} beschrieben werden. Für die Koordinatendifferenzen $\Delta x^1 = x_2^1 - x_1^1, \dots, \Delta t = t_2 - t_1, \dots$ folgt aus den obigen Formeln

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}^1 &= \gamma (\Delta x^1 - u \Delta t), & \Delta \hat{x}^2 &= \Delta x^2, & \Delta \hat{x}^3 &= \Delta x^3, & \Delta \hat{t} &= \gamma \left(\Delta t - \frac{u \Delta x^1}{c^2} \right), \\ \Delta x^1 &= \gamma (\Delta \hat{x}^1 + u \Delta \hat{t}), & \Delta t &= \gamma \left(\Delta \hat{t} + \frac{u \Delta \hat{x}^1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Transformation gleichzeitiger Ereignisse

Die Ereignisse E_1 und E_2 seien im System I gleichzeitig, d.h. es ist $\Delta t = 0$. Dann folgt

$$\Delta \hat{t} = -\frac{u \gamma(u) \Delta x^1}{c^2}.$$

Für einen Beobachter in \hat{I} sind die beiden Ereignisse *nicht* gleichzeitig, falls $\Delta x^1 \neq 0$, und dort ist das Ereignis E_2 früher als E_1 für $\Delta x^1 > 0$! Zahlenbeispiel:

$$u = 0,75 c : \gamma \approx 1,5; \Delta x^1 = 300 m; c \approx 3 \cdot 10^8 m s^{-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta \hat{t} \approx -1,1 \frac{\Delta x^1}{c} \approx -1,1 \cdot 10^{-6} s.$$

Längenkontraktion

Eine in \hat{I} ruhende Länge $\hat{l} = \Delta \hat{x}^1$ werde von I aus gemessen, wobei $\Delta t = 0$. Es folgt, daß

$$l = \Delta x^1 = \gamma^{-1} \hat{l} = (1 - \beta^2)^{1/2} \hat{l} < \hat{l} \text{ für } u \neq 0.$$

Dies bedeutet, daß die von I aus gesehene bewegte Länge \hat{l} dort verkürzt ist!

Zeitdilatation

Für die Zeitintervalle $\Delta \hat{t}$ einer in \hat{I} ruhenden Uhr, $\Delta \hat{x}^1 = 0$, erhält man in I :

$$\Delta t = \gamma \Delta \hat{t} > \Delta \hat{t}.$$

Für einen Beobachter im System I geht die bewegte Uhr also *langsamer*!

Anwendungsbeispiel:

Das Elementarteilchen Myon hat in seinem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer $\tau_\mu \approx 2,2 \cdot 10^{-6} s$. Myonen werden z.B. durch die kosmische Strahlung in ca. 60 km Höhe über der Erdoberfläche erzeugt und im Labor auf der Erde beobachtet. Wegen $\tau_\mu c \approx 660 m$ könnten die Myonen nach Galilei/Newton die Erde garnicht erreichen. Nach Einstein haben sie jedoch wegen ihrer großen Geschwindigkeit einen γ -Faktor in der Größe $\gamma \approx 100$ und damit vom Labor auf der Erde aus gesehen eine Lebensdauer $\tau_\mu^L \approx 100 \tau_\mu$, während der sie die Erdoberfläche erreichen können. Vom Ruhesystem der Myonen aus gesehen ist andererseits die Entfernung zwischen ihrem Entstehungsort und der Erdoberfläche um den Faktor 100 verkürzt!

Zwillingsparadoxon

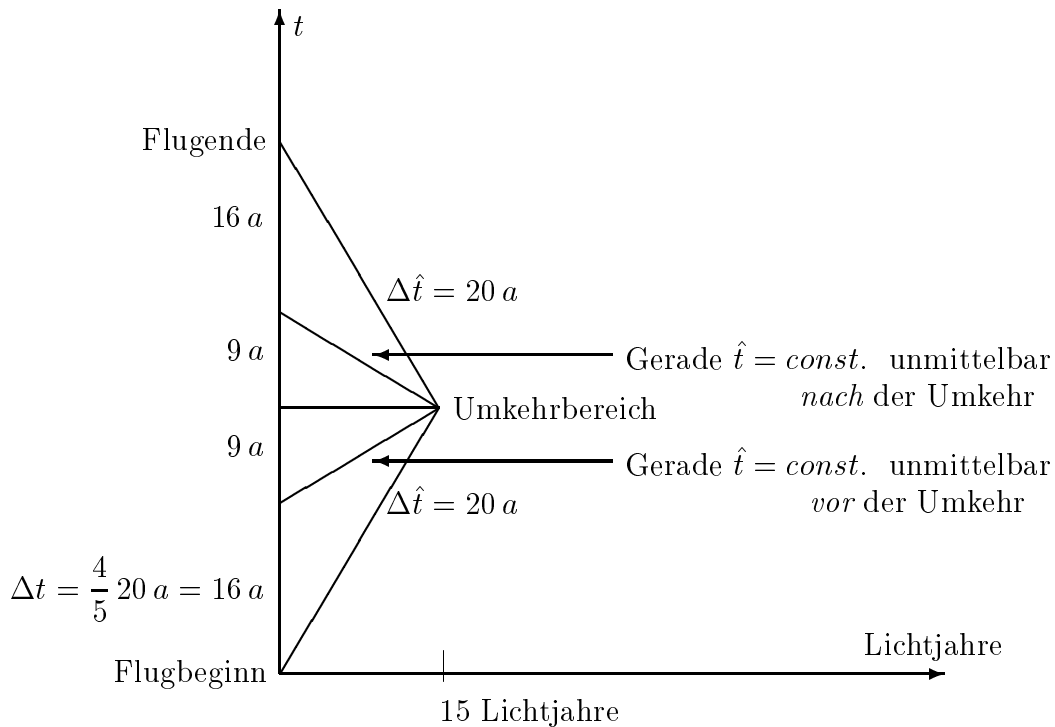
Einer von zwei Zwillingen fahre in einem Raumschiff mit der Geschwindigkeit $u = 3c/5$ zu einem $l = 15$ Lichtjahre entfernten Stern, kehre dort um und komme mit der Geschwindigkeit $-u$ zur Erde zurück.

Vom Zwilling auf der *Erde* aus gesehen gehen die Uhren im Raumschiff um den

Faktor $(1 - \beta^2)^{1/2} = 4/5$ langsamer, d.h. von der Erde aus gesehen, ist der reisende Zwilling nach der Rückkehr um $\hat{T} = 2l(1 - \beta^2)^{1/2}/u = 40$ Jahre gealtert, während der zurückgebliebene Zwilling gemäß seiner eigenen Uhren $T = 2l/u = 50$ Jahre älter geworden ist.

Vom *Raumschiff* aus gesehen gehen dagegen die Uhren auf der Erde langsamer, d.h. für den Zwilling im Raumschiff sollte nach dessen Rückkehr der zurückgebliebene Zwilling jünger sein! Welches Resultat ist richtig?

Die Lösung dieses berühmten Paradoxons liegt in der Tatsache, daß der Zwilling im Raumschiff **nicht** während des gesamten Fluges **in ein und demselben Inertialsystem** bleibt, sondern während des Umkehrmanövers von einem Inertialsystem zu einem anderen "umsteuern" muß. Während dieser Brems- und Beschleunigungsvorgänge altert der Zwilling auf der Erde um 18 Jahre! Man macht sich diesen Sachverhalt am einfachsten an dem folgenden Minkowski-Diagramm klar ($a =$ Jahr):



Im Jahre 1971 hat man ein Experiment dieses Types in der Form gemacht, daß man eine von zwei sehr genauen Cäsium-Uhren in einem Flugzeug um die Erde transportiert hat während die andere auf der Erde zurückblieb. Das Ergebnis war so wie von der speziellen Relativitätstheorie vorausgesagt.

Der sprintende Stabhochspringer in der Scheune

Ein Läufer sprinte - Geschwindigkeit u - mit einem Stab der (Ruhe-) Länge \hat{l} so schnell durch eine an zwei Seiten offene Scheune der Länge $a < \hat{l}$, daß der Stab

für einen in der Scheune ruhenden Beobachter zur Zeit $t = 0$ gerade ganz in die Scheune hineinpaßt, d.h. $l = \gamma^{-1} \hat{l} = a$ ist.

Für den Läufer ist dagegen die Länge a der Scheune um den Faktor γ^{-1} verkürzt! Wie sind beide Aussagen zu vereinbaren? Antwort: Für den Läufer sind vorderes und hinteres Stabende *nicht* gleichzeitig am ersten und zweiten Scheunentor! Es sei $\hat{t} = 0$, wenn das vordere Stabende das zweite Tor bei $\hat{x}^1 = x^1 = 0$ passiert. Für den Läufer hat in diesem Zeitpunkt die Scheune die Länge $\hat{a} = \gamma^{-1} a$, d.h. ein Stück der Länge $\hat{l} - \hat{a} = \hat{l} - \gamma^{-1} a$ des Stabes ragt hinten aus dem ersten Tor der Scheune heraus. Für den Läufer passiert das hintere Ende des Stabes das erste Tor zur Zeit $\hat{t} = -\gamma u x^1/c^2 = \gamma u a/c^2$, da $t = 0$ und $x^1 = -a$ für das hintere Stabende im System I . Es gilt dann offenbar $\hat{l} - \hat{a} = u \hat{t}$, oder

$$\hat{l} = \gamma^{-1} a + u^2 \gamma a/c^2 = \gamma (\gamma^{-2} + u^2/c^2) a = \gamma a = \gamma l.$$

Wie kommt der Stab durch die Öffnung ?

Im System I bewege sich ein flaches Blech mit einem kreisförmigen Loch vom Radius R mit konstanter Geschwindigkeit $v^3 > 0$ in Richtung der 3-Achse, wobei das Blech parallel zur (1,2)-Ebene ($x^3 = 0$) ist und der Mittelpunkt des Loches immer auf der 3-Achse bleibt. Das Blech passiere, von der negativen 3-Achse herkommend, zur Zeit $t = 0$ die Ebene $x^3 = 0$.

Gleichzeitig mit dem Blech bewege sich parallel und längs der 1-Achse ein dünner Stab der (Ruhe-) Länge $\hat{a} > 2R$ mit einer so hohen konstanten Geschwindigkeit u , daß er im System I die kontrahierte Länge $a = \gamma^{-1} \hat{a} < 2R$ habe. Die Bewegungen von Blech und Stab seien so arrangiert, daß der Mittelpunkt des Stabes ebenfalls zur Zeit $t = 0$ den Ursprung des Koordinatensystemes passiert.

Da der Stab im System I gegenüber dem Blech verkürzt ist, kann sich die Öffnung des Bleches über ihn hinwegbewegen, ohne ihn zu berühren! Im Ruhesystem \hat{I} des Stabes ist dagegen die Öffnung im Blech verkürzt. Wieso kann der Stab, von \hat{I} aus gesehen, überhaupt durch die Öffnung kommen?

Antwort: Im System \hat{I} ist das Blech mit seiner Öffnung um einen Winkel $\hat{\phi} > 0$ gegenüber der positiven $\hat{1}$ -Achse geneigt, so daß der Stab hindurchschlüpfen kann! Den Neigungswinkel $\hat{\phi}$ kann man folgendermaßen berechnen:

Zunächst transformieren wir die Geschwindigkeit $\vec{v} = (0, 0, v^3)$ des Bleches von I nach \hat{I} : Aus der Eigenschaft $\Delta x^1 = 0$ folgt

$$\Delta \hat{t} = \gamma \Delta t, \quad \Delta \hat{x}^1 = -u \Delta \hat{t} = -u \gamma \Delta t,$$

so daß

$$\hat{v}^3 = \frac{\Delta \hat{x}^3}{\Delta \hat{t}} = \frac{\Delta x^3}{\gamma \Delta t} = \gamma^{-1} v^3; \quad \hat{v}^1 = \frac{\Delta \hat{x}^1}{\Delta \hat{t}} = -u.$$

Es bewege sich nun eine zur 1-Achse parallele Länge $2R$ in I mit der Geschwindigkeit v^3 längs der 3-Achse, wobei ihr Mittelpunkt immer auf der 3-Achse liege und dieser die Ebene $x^3 = 0$ und damit den Ursprung zur Zeit $t = 0$ passiere. Zu diesem Zeitpunkt sei für den Mittelpunkt auch $\hat{t} = 0$, $\vec{\hat{x}} = 0$.

Im System I hat das rechte Ende der Länge zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten $(R, 0, 0)$. Dazu gehört im System \hat{I} die (negative) Zeit

$$\hat{t} = -\gamma u R/c^2,$$

d.h. zur späteren Zeit $\hat{t} = 0$ hat das rechte Ende in \hat{I} die Koordinaten

$$\begin{aligned}\Delta\hat{x}^3 &= \hat{v}^3(-\hat{t}) = R u v^3/c^2, \\ \Delta\hat{x}^1 &= \gamma R + \hat{v}^1(-\hat{t}) = \gamma R - u \gamma u R/c^2 = \gamma^{-1} R,\end{aligned}$$

wobei γR die zur Zeit $t = 0$ von I nach \hat{I} transformierte Länge R und $\hat{v}^1(-\hat{t})$ die von der Länge in der Zeit $-\hat{t}$ in Richtung der (negativen) $\hat{1}$ - Richtung zurückgelegte Strecke. Hieraus ergibt sich schließlich

$$\tan \hat{\phi} = \frac{\Delta\hat{x}^3}{\Delta\hat{x}^1} = u \gamma v^3/c^2.$$

Viele weitere Beispiele findet man z.B. in E.F. Taylor and J.A. Wheeler, Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity, 2nd ed. W.H. Freeman and Co., San Francisco 1992.

16.1.4 Transformation von Geschwindigkeiten

Im System I bewege sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = (v^1, v^2, v^3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}.$$

Die Frage ist, mit welcher Geschwindigkeit das Teilchen in \hat{I} beobachtet wird. Wir bekommen

$$\hat{v}^1 = \lim_{\Delta \hat{t} \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{x}^1}{\Delta \hat{t}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x^1 - u \Delta t}{\Delta t - \beta \Delta x^1/c} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^1/\Delta t) - u}{1 - \beta (\Delta x^1/c \Delta t)},$$

so daß

$$\hat{v}^1 = \frac{v^1 - u}{1 - \beta v^1/c}.$$

Analog erhält man

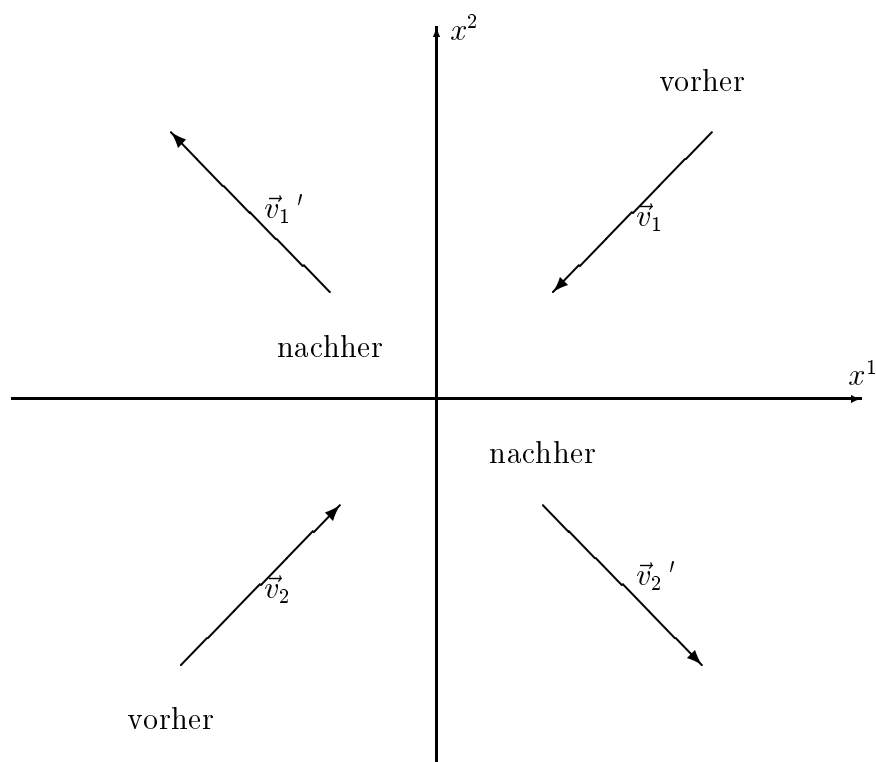
$$\hat{v}^2 = \frac{v^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta v^1/c}, \quad \hat{v}^3 = \frac{v^3 (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta v^1/c}.$$

Grenzfall: Ist $\vec{v} = (c, 0, 0)$, so folgt aus den obigen Formeln, daß $\vec{\hat{v}} = (c, 0, 0)$!

16.2 Impuls und Energie

In der Galilei-Newtonschen Physik sind der Impuls \vec{p} eines freien Teilchens durch $m\vec{v}$ und seine Energie E durch $m\vec{v}^2/2$ gegeben. Würde man diese Definition des Impulses beibehalten, so ginge der Satz von der Impulserhaltung verloren, wie man schon an dem folgenden einfachen Beispiel sehen kann:

Zwei harte Kugeln gleicher Masse m werden im System I als Schwerpunktsystem in der (1,2)-Ebene elastisch aneinander gestreut.



Aus der Impulserhaltung im Schwerpunktsystem,

$$m v_1^i + m v_2^i = m v_1^{i'} + m v_2^{i'} = 0, \quad i = 1, 2,$$

folgt

$$v_1^i = -v_2^i, \quad v_1^{i'} = -v_2^{i'}, \quad i = 1, 2.$$

Wir betrachten den Spezialfall einer Streuung, bei dem zusätzlich

$$v_1^{1'} = v_1^1, \quad v_2^{2'} = -v_2^2, \quad 1, 2.$$

Das System \hat{I} bewege sich relativ zu I mit der Geschwindigkeit $u = v_2^1$. Dann folgt aus den im letzten Abschnitt hergeleiteten Formeln für die Transformation von Geschwindigkeitskomponenten, daß

$$\hat{v}_1^2 = \frac{v_1^2 (1 - (v_2^1/c)^2)^{1/2}}{1 + (v_2^1/c)^2}, \quad \hat{v}_2^2 = \frac{v_2^2 (1 - (v_2^1/c)^2)^{1/2}}{1 - (v_2^1/c)^2} \neq -\hat{v}_1^2,$$

und entsprechend, wegen $v_2^{1'} = v_2^1$, $v_i^{2'} = -v_i^2$, $i = 1, 2$,

$$\hat{v}_1^{2'} = \frac{v_1^{2'} (1 - (v_2^1/c)^2)^{1/2}}{1 + (v_2^1/c)^2} = -\hat{v}_1^2, \quad \hat{v}_2^{2'} = \frac{v_2^{2'} (1 - (v_2^1/c)^2)^{1/2}}{1 - (v_2^1/c)^2} = -\hat{v}_2^2.$$

Man sieht, daß nun

$$m \hat{v}_1^{2'} + m \hat{v}_2^{2'} = -m \hat{v}_1^2 - m \hat{v}_2^2 \neq m \hat{v}_1^2 + m \hat{v}_2^2,$$

d.h. die Erhaltung des Impulses wäre von der Wahl des Inertialsystems abhängig, was nicht sein kann. Der Impuls eines Teilchens muß in der speziellen Relativitätstheorie neu definiert werden.

16.2.1 Der relativistische Impuls

Bei der Neudefinition des Impulses eines relativistischen Teilchens greifen wir auf seine Eigenzeit zurück (s. Abschnitt 16.1.2): Es sei \hat{I} das Ruhesystem des Teilchens. Dann ist die Zeit \hat{t} dieses Systems mit der Eigenzeit τ des Teilchens identisch. Das Teilchen bewege sich längs der 1-Achse mit der Geschwindigkeit $\beta c = v$. Die Ortskoordinaten x^i , $i = 1, 2, 3$ werden jetzt als Funktionen der Eigenzeit τ angesehen, $x^i = x^i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$.

Als *relativistische Geschwindigkeit* u^1 in 1-Richtung definieren wir

$$u^1 = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta x^1}{\Delta\tau} = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx^1}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{v}{\frac{d\tau}{dt}} = \gamma(v) v,$$

da

$$\Delta\tau = \gamma(v)(\Delta t - v \Delta x^1/c^2), \quad \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \gamma(v) (1 - v^2/c^2) = \gamma(v)^{-1}.$$

Wir definieren nun den relativistischen Impuls in 1-Richtung durch die Beziehung

$$p^1 = m u^1 = m \gamma(v) v,$$

bzw. unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems durch

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{d\tau} = m \gamma(v) \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad v = \|\vec{v}\|.$$

Hierbei ist m die in Kapitel 3 definierte träge (Ruhe-) Masse des Teilchens. Zur Begründung der letzten Beziehung für beliebige Geschwindigkeiten beachte man, daß die Eigenzeit allgemein durch

$$c^2 (\Delta\tau)^2 = (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2$$

gegeben ist, so daß

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta x^i}{\Delta t}\right)^2, \quad \frac{d\tau}{dt} = (1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Da die Masse m und die Eigenzeit $\Delta\tau$ in allen Inertialsystemen denselben Wert haben, so transformieren sich die Komponenten p^i , $i = 1, 2, 3$, des relativistischen Impulses wie die Koordinaten x^i selbst, d.h. der Impulserhaltungssatz für Streuprozesse gilt in *allen* Inertialsystemen, falls er für *ein* System erfüllt ist!

Aus der Reihenentwicklung (s.S. 20)

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

folgt für kleine Geschwindigkeiten, daß

$$m \gamma(v) \approx m + \frac{1}{c^2} T_{kin}, \quad T_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$

Diese Beziehung läßt sich so interpretieren, daß die nichtrelativistische kinetische Energie T_{kin} zur trägen Masse des Teilchens beiträgt. Jedoch ist der Beitrag wegen des Faktors c^2 im Nenner für Geschwindigkeiten $v \ll c$ sehr klein und für makroskopische Körper auf der Erde in der Regel vernachlässigbar.

16.2.2 Relativistische Energie

Aufgrund werden die obigen Beziehungen, wenn man die Reihenentwicklung in der Form

$$m \gamma(v) c^2 = m c^2 + \frac{m}{2} v^2 + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2} + \dots$$

schreibt. Jetzt tritt zu der nichtrelativistischen kinetischen Energie T_{kin} noch der Term $m c^2$ hinzu, der im Limes $v \rightarrow 0$ übrig bleibt und den man deshalb als "Ruheenergie" des Teilchens interpretieren kann. Dies hat die folgende, zuerst von Einstein im Jahre 1905 gesehene, weitreichende Konsequenz:

Die träge Masse m eines Körpers stellt ein Energieäquivalent der Größe $m c^2$ dar!

Die Größe

$$E = m \gamma(v) c^2 = c (\vec{p}^2 + c^2 m^2)^{1/2}$$

ist demnach als **Gesamtenergie** des freien Teilchens,

$$E_0 = m c^2$$

als seine **Ruheenergie** und schließlich die Differenz

$$E_{kin} = E - E_0 = m c^2 (\gamma(v) - 1)$$

als seine **kinetische Energie** zu interpretieren.

Wir haben die Komponenten p^i des Impulses mittels der relativistischen Geschwindigkeiten $u^i = dx^i/d\tau$ definiert. Analog erhalten wir für die Koordinate x^0 :

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c \gamma(v),$$

d.h. wir haben

$$E = c p^0, \quad p^0 \equiv m u^0 = m \frac{dx^0}{d\tau} = (\vec{p}^2 + m^2 c^2)^{1/2}.$$

Die Größe

$$u = (u^0, \vec{u})$$

bezeichnet man als **Vierergeschwindigkeit** und

$$m u = p = (p^0, \vec{p})$$

als **Viererimpuls**. Für diese gelten die Beziehungen

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 = c^2, \quad (p^0)^2 - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2.$$

Bewegt sich ein System \hat{I} gegenüber dem System I mit der Geschwindigkeit βc in 1-Richtung, so transformieren sich die Komponenten des Viererimpulses folgendermaßen

$$\hat{p}^0 = \gamma(\beta) (p^0 - \beta p^1), \quad \hat{p}^1 = \gamma(\beta) (p^1 - \beta p^0), \quad \hat{p}^i = p^i, i = 2, 3.$$

Dies ist eine unmittelbare Folge der oben schon erwähnten Eigenschaft, daß die Impulse p^μ sich aufgrund ihrer Definition wie die Koordinaten x^μ (s. Abschnitt 16.1.2) transformieren müssen.

16.3 Äußere Kräfte auf ein relativistisches Teilchen

16.3.1 Die Bewegungsgleichung

Es sei \vec{K} eine vorgegebene äußere Newtonsche Kraft, z.B. die Lorentz-Kraft $\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, die auf ein relativistisches Teilchen wirkt, d.h. auf ein Teilchen mit dem Impuls $\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d[\gamma(v)\vec{v}]}{dt} = \vec{K}.$$

Die zugehörige Leistung ergibt sich auch hier durch Multiplikation mit \vec{v} :

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} \cdot \vec{v}.$$

Wegen

$$\frac{\partial p^0}{\partial p^i} = \frac{v^i}{c}, \quad i = 1, 2, 3,$$

kann man die letzte Gleichung auch als

$$\frac{c dp^0}{dt} = \frac{dE}{dt} = \vec{K} \cdot \vec{v}$$

schreiben.

Falls ferner

$$\vec{K} = -\text{grad}V,$$

und V nicht explizit von der Zeit abhängt, so folgt auch hier der **Energiesatz**

$$c p^0 + V = \text{const.}$$

Beispiel:

Bewegung eines Teilchens mit Ladung q in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E} = (E_0, 0, 0)$: Das Teilchen habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_0^1, v_0^2, 0)$. Dann folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp^1}{dt} = q E_0, \quad \frac{dp^2}{dt} = 0, \quad \frac{dp^3}{dt} = 0,$$

daß

$$p^1 = q E_0 t + b^1, \quad p^2 = b^2, \quad p^3 = 0, \quad p^0(t) = [m^2 c^2 + (b^2)^2 + (q E_0 t + b^1)^2]^{1/2},$$

wobei

$$\vec{b} = m \gamma(v_0) \vec{v}_0, \quad \vec{v}_0 = c \vec{b}/p^0(t=0).$$

Es gilt demnach

$$\frac{dx^1}{dt} = v^1 = \frac{c p^1}{p^0(t)} = \frac{c}{q E_0} \frac{d}{dt} [m^2 c^2 + (b^2)^2 + (q E_0 t + b^1)^2]^{1/2},$$

$$\frac{dx^2}{dt} = v^2 = \frac{c p^2}{p^0} = \frac{c b^2}{p^0}, \quad \frac{dx^3}{dt} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} x^1(t) &= \frac{c}{q E_0} [m^2 c^2 + (b^2)^2 + (q E_0 t + b^1)^2]^{1/2} + C^1, \\ x^2(t) &= c b^2 \int [m^2 c^2 + (b^2)^2 + (q E_0 t + b^1)^2]^{-1/2} dt \\ &= \frac{c b^2}{q E_0} \operatorname{arsinh} \left[\frac{q E_0 t + b^1}{\sqrt{m^2 c^2 + (b^2)^2}} \right] + C^2, \end{aligned}$$

wobei C^i , $i = 1, 2$, Integrationskonstanten.

16.3.2 Lagrange- und Hamilton-Funktion

Da

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2} = -\gamma(v) \frac{v^i}{c^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

so läßt sich die Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen unter dem Einfluß der Lorentz-Kraft aus der Lagrange-Funktion

$$L = -m c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} - q \phi + q \vec{v} \cdot \vec{A}$$

herleiten. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir in diesem Kapitel die kanonischen Impulse mit π_i bezeichnen. Wir erhalten dann

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = m \gamma v^i + q A^i = p^i + q A^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Daraus ergibt sich die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^3 v^i \pi_i - L = m c^2 \gamma(v) + q \phi,$$

und da $m c \gamma(v) = (m^2 c^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$, so folgt

$$H(\vec{x}, \vec{\pi}, t) = c [m^2 c^2 + (\vec{\pi} - q \vec{A})^2]^{1/2} + q \phi,$$

oder, etwas symmetrischer geschrieben,

$$\frac{1}{c^2} (H - q \phi)^2 - (\vec{\pi} - q \vec{A})^2 = m^2 c^2.$$

16.3.3 Relativistische Form der Lorentz-Kraft

Wir haben schon im Zusammenhang mit Geschwindigkeit und Impuls gesehen, daß es für die Beschreibung relativistischer Teilchen vorteilhaft ist, anstelle der vom jeweiligen Inertialsystem abhängigen Zeit t die invariante Eigenzeit τ als unabhängige Variable einzuführen. Dies ist auch für die Formulierung der Bewegungsgleichung so. Dazu definieren wir zunächst die **Viererbeschleunigung**

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Offensichtlich ist

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = m \vec{a}$$

Differenziert man die Relation

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 = c^2$$

nach τ , so folgt

$$\boxed{a^0 u^0 - \vec{a} \cdot \vec{u} = 0.}$$

Es ist daher

$$\boxed{\frac{dp^0}{d\tau} = m a^0 = m \vec{a} \cdot \vec{u}/u^0 = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \vec{K} \cdot \vec{u}/c.}$$

Die Größe $dp^0/d\tau$ ist also im wesentlichen die relativistische Leistung. Definieren wir

$$\boxed{F^0 \equiv \vec{K} \cdot \vec{u}/c, \quad \vec{F} \equiv \vec{K} \gamma(v),}$$

so lauten relativistische Energiebilanz und Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.}$$

Speziell für die Lorentz-Kraft erhalten wir

$$F^0 = q \vec{E} \cdot \vec{u}/c, \quad \vec{F} = q \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q (u^0 \vec{E}/c + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Beim Wirkungsintegral bekommen wir durch den Übergang $t \rightarrow \tau$

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L} d\tau, \quad \tilde{L} = L \frac{dt}{d\tau} = L \gamma.$$

Im Falle der Lorentz-Kraft ergibt das

$$\boxed{\tilde{L}(x, u) = -m c ((u^0)^2 - \vec{u}^2)^{1/2} - q (u^0 \phi/c - \vec{u} \cdot \vec{A}).}$$

Hier sind die 4 Koordinaten x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, die verallgemeinerten Koordinaten q^μ und die Vierergeschwindigkeiten u^μ die verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Dabei ist zu beachten, daß die Beziehung $(u^0)^2 - \vec{u}^2 = c^2$ erst für die Größen in den Bewegungsgleichungen, nämlich den Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

gilt. Explizit lauten diese Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^0} = -\frac{d}{d\tau} (m u^0 + q \phi/c) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^0} = -q (u^0 \partial_0 \phi/c - \vec{u} \cdot \partial_0 \vec{A}),$$

wobei $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Da $-\text{grad}\phi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}$ (s. S. 132/133), so folgt

$$m a^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = q \vec{u} \cdot \vec{E}/c.$$

Die Lagrangesche Gleichung für die Variable x^0 ist also die differentielle Energiebilanz-Gleichung .

Analog erhalten wir aus den übrigen Lagrangeschen Gleichungen für $x^i, i = 1, 2, 3$,

$$m \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = q (u^0 \vec{E}/c + \vec{u} \times \vec{B}).$$

Wir definieren ferner

$$A^0 = \phi/c, \quad A = (A^0, A^1, A^2, A^3).$$

Man bezeichnet A als elektromagnetisches **Viererpotential**. Die durch

$$\begin{aligned} E^i &= -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \equiv F_{0i} = -F_{i0}, \\ \epsilon_{ijk} B^k &= \partial_i A^j - \partial_j A^i \equiv -F_{ij} = F_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

definierten Größen $F_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, bilden eine schiefsymmetrische 4×4 -Matrix der elektromagnetischen Feldstärken:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen können wir schreiben (Summationskonvention!)

$$u^0 E^i/c = u^0 F_{0i}, \quad (\vec{u} \times \vec{B})^i = u^j F_{ji}, \quad i = 1, 2, 3,$$

und erhalten daher die folgende symmetrische Form der relativistischen Bewegungsgleichungen für die Lorentz-Kraft

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= q F_{0\mu} u^\mu, \\ \frac{dp^i}{d\tau} &= -q F_{i\mu} u^\mu, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Man beachte , daß $F_{00} = 0$.

16.4 Die Lorentz-Gruppe, Vierervektoren und Tensoren

16.4.1 Allgemeine Lorentz-Transformationen

Wir haben bisher nur spezielle Lorentz-Transformationen in Richtung der 1-Achse betrachtet. Die Verallgemeinerung für beliebige Richtungen \vec{n} , $\vec{n}^2 = 1$, mit Geschwindigkeiten $\vec{\beta}c = \beta c \vec{n}$, ist einfach, wenn man beachtet, daß

$$x^1 \vec{e}_1 = \vec{x}_{\parallel} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{x}) \vec{e}_1, \quad x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{e}_1 \cdot \vec{x}) \vec{e}_1.$$

Die speziellen Lorentz-Transformationen lauten dann

$$\hat{x}^0 = \gamma(\beta)(x^0 - \beta(\vec{e}_1 \cdot \vec{x})), \quad \vec{\hat{x}}_{\parallel} = \gamma(\beta)(\vec{x}_{\parallel} - \beta x^0 \vec{e}_1), \quad \vec{\hat{x}}_{\perp} = \vec{x}_{\perp}.$$

Ersetzen wir die Richtung \vec{e}_1 durch die beliebige Richtung \vec{n} , so gilt

$$\boxed{\vec{x}_{\parallel} = (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n}, \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n},}$$

mit analogen Formeln für das System \hat{I} . Dabei beachte man, daß zwar die Bewegungsrichtung \vec{n} von \hat{I} gegenüber I beliebig ist, daß jedoch weiterhin die Achsen der beiden Systeme parallel sind, d.h. es gilt weiterhin $\vec{\hat{e}}_i = \vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$!

Die Lorentz-Transformationen in die Richtung \vec{n} sind völlig analog wie bei \vec{e}_1 gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}^0 &= \gamma(\beta)(x^0 - \beta \vec{n} \cdot \vec{x}), \\ \vec{\hat{x}}_{\parallel} &= \gamma(\beta)(\vec{x}_{\parallel} - \beta x^0 \vec{n}), \\ \vec{\hat{x}}_{\perp} &= \vec{x}_{\perp}. \end{aligned}}$$

Setzen wir noch $\gamma(\beta) = \cosh \chi$, $\beta \gamma(\beta) = \sinh \chi$ und beachten wir daß $\vec{\hat{x}} = \vec{\hat{x}}_{\parallel} + \vec{\hat{x}}_{\perp}$ so können wir auch schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}^0 &= x^0 \cosh \chi - (\vec{n} \cdot \vec{x}) \sinh \chi, \\ \vec{\hat{x}} &= (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} \cosh \chi - x^0 \vec{n} \sinh \chi + \vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} \\ &= \vec{x} + (\cosh \chi - 1)(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} - x^0 \vec{n} \sinh \chi. \end{aligned}}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\boxed{(\hat{x}^0)^2 - \vec{\hat{x}}^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2.}$$

Die obigen Formeln für eine Lorentz-Transformation in Richtung \vec{n} bilden das Analogon zu den entsprechenden Formeln für Drehungen um die Richtung \vec{n} mit Drehwinkel ϕ :

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x})) \cos \phi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \phi \\ &= \vec{x} \cos \phi + (1 - \cos \phi) (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \sin \phi \vec{n} \times \vec{x}.\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich naheliegend, im Raum der Vierervektoren $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$ das indefinite Skalarprodukt

$$(x, y) \equiv x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

einzuführen, wobei

$$g_{00} = 1 = -g_{11} = g_{22} = g_{33}, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu.$$

Sowohl Lorentz-Transformationen in beliebige Richtungen \vec{n} wie auch beliebige Drehungen lassen dieses Skalarprodukt invariant! Allgemein gilt (Summationskonvention!):

Es sei

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \hat{y}^\mu \rightarrow \hat{y}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu$$

eine Transformation, die das Skalarprodukt (x, y) invariant läßt. Da x und y beliebig, so folgt aus

$$(\hat{x}, \hat{y}) = g_{\mu\nu} \hat{x}^\mu \hat{y}^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta y^\beta = (x, y) = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

daß

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Definiert man die 4×4 -Matrizen

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu), \quad g = (g_{\mu\nu}),$$

so lassen sich diese 16 Bedingungsgleichungen in der kompakten Form

$$\Lambda^T \cdot g \cdot \Lambda = g$$

schreiben. Da $g^T = g$, so sind nur 10 der 16 Bedingungsgleichungen voneinander unabhängig. Eine beliebige Matrix Λ hängt daher von 6 unabhängigen Parametern ab. Für diese kann man die drei Drehwinkel von drei voneinander unabhängigen Drehungen sowie die drei reduzierten Geschwindigkeiten $\beta_i, i = 1, 2, 3$, von 3 speziellen Lorentz-Transformationen in drei unabhängige Richtungen wählen.

Eine beliebige Transformation Λ mit der Eigenschaft $\Lambda^T \cdot g \cdot \Lambda = g$ heißt **homogene Lorentz-Transformation**. Die Menge

$$L = \{\Lambda\}$$

bildet eine Gruppe:

Falls nämlich $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L$, so gilt

$$(\Lambda_2 \cdot \Lambda_1)^T \cdot g \cdot (\Lambda_2 \cdot \Lambda_1) = \Lambda_1^T \cdot \Lambda_2^T \cdot g \cdot \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 = \Lambda_1^T \cdot g \cdot \Lambda_1 = g, \Rightarrow \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \in L.$$

Wegen $\det g = -1$ folgt aus

$$\det(\Lambda^T \cdot g \cdot \Lambda) = -\det \Lambda^T \det \Lambda = -(\det \Lambda)^2 = -1,$$

die Beziehung

$$\boxed{\det \Lambda = \pm 1.}$$

Dies bedeutet, daß Λ^{-1} existiert und

$$(\Lambda^{-1})^T \cdot g \cdot \Lambda^{-1} = (\Lambda^T)^{-1} \cdot \Lambda^T \cdot g \cdot \Lambda \cdot \Lambda^{-1} = g, \Rightarrow \Lambda^{-1} \in L.$$

Die homogenen Lorentz-Transformationen bilden also eine Gruppe, die **homogene Lorentz-Gruppe**.

Aus

$$\Lambda^\mu{}_{0} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_{0} = g_{00} = 1$$

folgt

$$(\Lambda^0{}_{0})^2 = 1 + (\Lambda^1{}_{0})^2 + (\Lambda^2{}_{0})^2 + (\Lambda^3{}_{0})^2,$$

so daß

$$\boxed{\Lambda^0{}_{0} \geq 1 \text{ oder } \Lambda^0{}_{0} \leq -1.}$$

Dies bedeutet, daß die Menge L in vier "Stücke" oder "Komponenten" zerfällt, die je durch ein Paar der Vorzeichen

$$\det \Lambda = \pm 1, \quad \text{sgn}(\Lambda^0{}_{0}) = \pm 1$$

bestimmt sind. Die Untermenge

$$\boxed{L_+^\uparrow = \{\Lambda; \det \Lambda = 1, \text{sgn}(\Lambda^0{}_{0}) = 1\}}$$

bildet eine Untergruppe, die **eigentliche orthochrone homogene Lorentz-Gruppe**.

16.4.2 Kontra- und kovariante Vierervektoren sowie Kovarianz der relativistischen Lorentz-Kraft

Mittels des "symmetrischen metrischen Tensors" ($g_{\mu\nu}$) kann man für die "kontravarianten" Vierervektoren

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = x^T \cdot g, \\ \bar{p} &\equiv (p_0, p_1, p_2, p_3) = p^T \cdot g, \\ \bar{A} &\equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) = A^T \cdot g \end{aligned}$$

die zu ihnen "dualen" bzw. "kovarianten" Vektoren $\bar{x}, \bar{p}, \bar{A}$ etc. definieren. Für die Komponenten bedeutet dies

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu : x_0 = x^0, x_i = -x^i, i = 1, 2, 3 \text{ etc. .}$$

Für das Skalarprodukt können wir damit schreiben

$$(x, y) = \bar{x} \cdot y = x^T \cdot g \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu.$$

Aus $\hat{x} = \Lambda \cdot x$ folgt

$$\bar{\hat{x}} = \hat{x}^T \cdot g = x^T \cdot \Lambda^T \cdot g = x^T \cdot g \cdot (g \cdot \Lambda^T \cdot g) = \bar{x} \cdot \Lambda^{-1} = \hat{\bar{x}},$$

Bei Lorentz-Transformationen Λ gilt also

$$x \rightarrow \Lambda \cdot x, \quad \bar{x} \rightarrow \bar{x} \cdot \Lambda^{-1}, \quad \bar{x} \cdot x \rightarrow \bar{x} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Lambda \cdot x = \bar{x} \cdot x.$$

Für p, \bar{p}, A, \bar{A} etc. ergeben sich entsprechende Formeln. Z.B. haben wir für den Viererimpuls $p \rightarrow \hat{p} = \Lambda \cdot p$, $\bar{p} \rightarrow \hat{\bar{p}} = \bar{p} \cdot \Lambda^{-1}$ mit

$$(\hat{p}, \hat{p}) = \hat{\bar{p}} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Lambda \cdot p = \bar{p} \cdot p = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = m^2 c^2.$$

Definieren wir noch

$$(g^{\mu\nu}) \equiv (g_{\mu\nu})^{-1},$$

so folgt für den Minkowski-Raum

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}).$$

Mit

$$F^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = -F^{\nu\mu}$$

erhalten wir dann für die relativistische Lorentz-Kraft die kompakte symmetrische Form

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu}(x) u_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

und für die zugehörige Lagrange-Funktion

$$\tilde{L} = -m c (u^\mu u_\mu)^{1/2} - q u_\mu A^\mu.$$

Wenn die Komponenten $A^\mu(x)$ des Vektorpotentials sich bei Lorentz-Transformationen wie

$$A^\mu(x) \rightarrow \hat{A}^\mu(\hat{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

transformieren, so folgt für die Komponenten $F^{\mu\nu}$ des Feldstärketensors:

$$F^{\mu\nu}(x) \rightarrow \hat{F}^{\mu\nu}(\hat{x}) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x).$$

Die obigen Gleichungen für die Lorentz-Kraft sind bei solchen Transformationen "Lorentz-kovariant", d.h. *beide Seiten transformieren sich wie Vierervektoren und haben daher in allen Inertialsystemen die gleiche Form.* Im System \hat{I} gilt also

$$\frac{d\hat{p}^\mu}{d\tau} = q \hat{F}^{\mu\nu}(\hat{x}) \hat{u}_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Mehr zur speziellen Relativitätstheorie findet man in

1. M. Rinke, Skriptum zur Vorlesung "Spezielle Relativitätstheorie", WS 97/98; dort auch weitere Literaturhinweise.
2. E.F. Taylor and J.A. Wheeler, Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity, 2nd ed., W.H. Freeman and Co., San Francisco 1992.
3. R.U. Sexl und H.K. Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen, 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien und New York 1982.

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeines zum Inhalt der Vorlesung	1
1.1	Voraussetzungen	1
1.2	Literatur zur Vorlesung	2
1.3	Wissenschaftstheoretische Bemerkungen	3
1.3.1	Empirisch-experimenteller Bereich	3
1.3.2	Mathematische Modelle	3
1.3.3	Verbindliche Interpretation	3
1.4	Wissenschaftssoziologische Bemerkungen	5
2	Geometrie von Raum und Zeit	6
2.1	Literatur	6
2.2	Verschiedene Raum-Zeit Modelle	6
2.2.1	Modelle, bei denen die Struktur von Raum und Zeit unabhängig von der vorhandenen Materie ist	6
2.2.2	Modelle, bei denen die Struktur von Raum und Zeit durch die vorhandene Materie bestimmt ist	7
2.3	Die euklidische Geometrie des Raumes	7
2.4	Der Galilei-Newtonsche Zeitbegriff	11
2.4.1	Elemente des Zeitbegriffes	11
2.4.2	Problem der Realisierbarkeit von freien Teilchen sowie von Inertialsystemen	12
2.5	Einige Eigenschaften von Inertialsystemen	13
2.5.1	Analytische Beschreibung eines Teilchens in einem Inertialsystem	13
2.5.2	Relationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen	13
2.6	Galileisches Relativitätsprinzip	17
3	Die träge Masse	18
3.1	Operative Definition der trägen Masse durch Stoßvorgänge	18
3.2	Eigenschaften der trägen Masse	19
3.2.1	Relationen zwischen Massen	19
3.2.2	Additivität	19
3.2.3	Unabhängigkeit vom Inertialsystem	19
3.2.4	Impulssatz	20

4	Äußere Kräfte auf ein Teilchen	21
4.1	Der Newtonsche Kraftbegriff	21
4.1.1	Die Bewegungsgleichung	21
4.1.2	Allgemeine Eigenschaften der Kraft	21
4.2	Energien und Leistung	22
4.2.1	Der Energiesatz, Folge der Invarianz des Potentials gegenüber Zeittranslationen	22
4.2.2	Arbeit und Leistung	24
4.3	Konstante Kräfte, Wurfbewegungen	25
5	Oszillatoren	28
5.1	Der 1-dimensionale harmonische Oszillator	28
5.1.1	Stabiles Gleichgewicht ($b > 0$)	29
5.1.2	Instabiles Gleichgewicht ($b < 0$)	32
5.2	Reibungskräfte	32
5.3	Gedämpfte Schwingungen	34
5.3.1	Bewegungsgleichung und Energiebilanz	34
5.3.2	Bestimmung von Lösungen durch Ansatz	35
5.3.3	Systematische Herleitung der Lösungen	35
5.3.4	Diskussion verschiedener Lösungstypen	37
5.3.5	Phasenporträt des gedämpften harmonischen Oszillators	39
5.3.6	Attraktoren und asymptotische Stabilität	44
5.3.7	Wronski-Determinante	44
5.4	Erzwungene Schwingungen	45
5.4.1	Inhomogene Bewegungsgleichungen und ihre Lösungen	45
5.4.2	Spezielle Lösung bei zeitlich periodisch einwirkender Kraft	46
5.4.3	Diskussion spezieller Lösungen, Resonanzen	47
5.5	Nichtlineare Oszillatoren	51
5.6	Harmonischer Oszillator in der Ebene	52
5.6.1	Beschreibung mittels kartesischer Koordinaten	52
5.6.2	Phasenporträt	56
5.6.3	Periodische und quasiperiodische Bahnen	56
5.6.4	Beschreibung mittels Polarkoordinaten	60
6	Rotationssymmetrische Potentiale	65
6.1	Erhaltung des Drehimpulses	65
6.1.1	Drehimpulserhaltung und ebene Bewegung	66
6.1.2	Drehimpulserhaltung und Keplerscher Flächensatz	66
6.1.3	Trägheitskräfte und effektives Potential	67
6.2	Verhalten am Ursprung und an den Umkehrpunkten	68
6.3	Phasenporträt der Radialkoordinaten	72
6.4	Integration der Bewegungsgleichungen	72
6.4.1	Bestimmung der Zeitabhängigkeit von Radialkoordinate und Winkel	72
6.4.2	Die Bahngleichung	73

6.5	Der Virialsatz	75
7	Bewegungen in Schwerfeldern	77
7.1	Schwere und träge Masse	77
7.2	Die Bahnen im Gravitationsfeld	83
7.2.1	Ellipsenbahnen	84
7.2.2	Parabelbahnen	85
7.2.3	Hyperbelbahnen	85
7.3	Keplers 3. Gesetz	86
7.4	Die Zeitabhängigkeit der Ellipsenbewegung	87
7.5	Der Runge-Lenz-Vektor	88
8	Zwei-Körper-Probleme	90
8.1	Allgemeine Eigenschaften, Erhaltungssätze	90
8.1.1	Erhaltung des Gesamtimpulses	90
8.1.2	Erhaltung der Gesamtenergie	91
8.1.3	Erhaltung des Gesamtdrehimpulses	92
8.1.4	Kräftefreie Schwerpunktbewegung	92
8.1.5	Relativ- und Schwerpunkt-Bewegungen	93
8.1.6	Nochmal die Planetenbewegung	94
8.2	Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens	94
8.2.1	Beschreibung des Zerfalls im Schwerpunktsystem	95
8.2.2	Der Zerfall im Laborsystem	95
8.2.3	Statistische Zerfallsverteilungen	96
8.3	Elastische Streuung	97
8.3.1	Qualitative Skizze von Streuprozessen	97
8.3.2	Anfangszustände, Endzustände und Erhaltungssätze	98
8.3.3	Streuwinkel und Wirkungsquerschnitt	103
8.3.4	Rutherford'scher Wirkungsquerschnitt für die Streuung geladener Teilchen	106
9	Zum N-Körper-Problem	107
9.1	Bezeichnungen und Grundannahmen	107
9.2	Gesamtimpuls und Schwerpunktbewegung	108
9.3	Drehimpulse und Drehmomente	109
9.4	Energieerhaltung	110
9.5	Virialsatz	112
10	Zwangskräfte und d'Alembertsches Prinzip	113
10.1	1-Teilchen-Dynamik mit Zwangsbedingungen	115
10.1.1	Treibende Kräfte und Zwangskräfte	116
10.1.2	D'Alembertsches Prinzip	118
10.1.3	Energiebilanz bei zeitabhängiger Zwangsbedingung	119
10.1.4	Bewegung bei zwei Zwangsbedingungen	119
10.2	N-Teilchen-Bewegungen bei Zwangsbedingungen	120

10.2.1	Lagrangesche Gleichungen 1. Art	120
10.2.2	D'Alembertsches Prinzip für N Massenpunkte	121
10.2.3	Statische Gleichgewichte	122
11	Lagrangesche Formulierung der Mechanik	124
11.1	Mathematische Vorbemerkungen	124
11.2	Lagrangesche Gleichungen 2.Art	125
11.2.1	Verallgemeinerte Koordinaten	125
11.2.2	Die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten	127
11.2.3	Beispiele für Lagrange-Funktionen und zugehörige Lagrange-sche Gleichungen	129
11.2.4	Zyklische Koordinaten und Erhaltungssätze	137
12	Das Wirkungsintegral	141
12.1	Die 1. Variation des Wirkungsintegrals	141
12.2	Lagrangesche Gleichungen und Wirkungsprinzip	143
12.3	Noetherscher Satz	144
12.3.1	Invariante Lagrange-Funktion	144
12.3.2	Invarianz der Wirkung bis auf Randterme	145
12.3.3	Die 1. Variation bei Mitvariation der Zeit	146
13	Hamiltonsche Formulierung der Mechanik	148
13.1	Hamilton-Funktionen und kanonische Gleichungen	148
13.2	Die Poisson-Algebra	151
13.3	Kanonische Transformationen	152
13.3.1	Endliche Transformationen	152
13.3.2	Infinitesimale Transformationen	155
13.4	Hamilton-Jacobi-Theorie	156
13.4.1	Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung	156
13.4.2	Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung, Winkel- und Wirkungsvariable	161
14	Beliebig bewegte Bezugssysteme	168
14.1	Rotierende Bezugssysteme	168
14.1.1	Die Transformationen von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen	169
14.1.2	Die Newtonsche Bewegungsgleichungen in rotierenden Bezugssystemen	172
14.1.3	Die Erde als rotierendes Bezugssystem	173
14.2	Beliebig beschleunigte Bezugssysteme	177
14.2.1	Die momentane Drehachse	177

15 Der starre Körper	180
15.1 Eulersche Winkel und Drehgeschwindigkeiten	180
15.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor	183
15.2.1 Kinetische Energie	183
15.2.2 Der Trägheitstensor	185
15.3 Translationsbewegung des Schwerpunktes	187
15.4 Drehimpuls	187
15.4.1 Der kräftefreie Kreisel im Inertialsystem	188
15.5 Die Eulerschen Kreiselgleichungen	192
15.5.1 Nochmal der kräftefreie symmetrische Kreisel	192
15.6 Der schwere symmetrische Kreisel	193
15.6.1 Eulersche Winkel und Drehmoment	193
15.6.2 Lagrange-Funktion, Erhaltungssätze und Integration der Bewegungsgleichungen	194
15.6.3 Effektives ϑ -Potential und verschiedene Bewegungstypen des Kreisels	196
16 Spezielle Relativitätstheorie	202
16.1 Spezielle Lorentz-Transformationen	203
16.1.1 Herleitung der speziell. Lorentz-Transformationen	203
16.1.2 Minkowski-Raum und Eigenzeit	206
16.1.3 Anwendungen der Lorentz-Transformationen	208
16.1.4 Transformation von Geschwindigkeiten	212
16.2 Impuls und Energie	213
16.2.1 Der relativistische Impuls	214
16.2.2 Relativistische Energie	215
16.3 Äußere Kräfte auf ein relativistisches Teilchen	216
16.3.1 Die Bewegungsgleichung	216
16.3.2 Lagrange- und Hamilton-Funktion	218
16.3.3 Relativistische Form der Lorentz-Kraft	218
16.4 Die Lorentz-Gruppe, Vierervektoren und Tensoren	221
16.4.1 Allgemeine Lorentz-Transformationen	221
16.4.2 Kontra- und kovariante Vierervektoren sowie Kovarianz der relativistischen Lorentz-Kraft	224