

**Theoretische Physik (für Physiker)**

**Elektrodynamik**

SS 1999

**H.A. Kastrup**

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

### 1.1 Voraussetzungen

Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Elektrodynamik wie sie im Grundkurs "Physik" vermittelt werden sowie Kenntnisse aus der Mathematik von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher (s. hierzu die am Anfang des Mechanikskriptums angegebenen mathematischen Lehrbücher von *Großmann* sowie von *Grauert et al.* samt dem zugehörigen Band III von *Grauert und Lieb*, der die Mathematik zur Elektrodynamik enthält.)

Während man es in der Mechanik mathematisch vor allem mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun hat, werden in der Elektrodynamik die physikalischen Systeme mit Hilfe von **partiellen Differentialgleichungen** beschrieben. Die systematische Kenntnis der Theorie solcher Gleichungen wird *nicht* vorausgesetzt sondern die erforderliche Mathematik im Laufe der Vorlesung bereitgestellt.

Gute Lehrbücher zu den in der Physik, insbesondere der Elektrodynamik, vorkommenden partiellen Differentialgleichungen sind die folgenden:

- R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik I , 3. Aufl. und II, 2. Aufl. (Heidelberger Taschenbücher Bde. 30 u. 31), Springer-Verlag, Heidelberg etc. 1968;
- E. Kamke, Differentialgleichungen II, Partielle Differentialgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965;
- A. N. Tychonoff u. A.A. Samarski, Differentialgleichungen der Mathematischen Physik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959;
- G. Hellwig, Partial Differential Equations, 2.Aufl., Teubner, Stuttgart 1977.

### 1.2 Literatur zur Vorlesung

1. J. Honerkamp u. H. Römer, Grundlagen der klassischen Theoret. Physik, 3. Aufl., Springer-Verlag 1993;

2. R. Becker u. F. Sauter, Theorie der Elektrizität, Band 1, 21. Aufl., Teubner-Verlag 1973;
3. W. Panofsky u. M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, 2nd Edition, Addison-Wesley 1972;
4. The Feynman Lectures on Physics, Vol. II, Addison-Wesley 1972;  
Zweisprachige Ausgabe (Englisch und Deutsch) beim Verlag Oldenbourg, München;
5. J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd Ed., John Wiley and Sons, Inc., N.Y. 1998; Deutsche Übersetzung der 2. Aufl.: de Gruyter, 1983.

# Kapitel 2

## Elektrische Ladungen

### 2.1 Grundphänomene der Elektrodynamik

In der Elektrodynamik hat man es mit **elektrischen Ladungen**, statischen und bewegten (Ströme), *einerseits* sowie **elektrischen, bzw. magnetischen Feldern** *andererseits* zu tun; eines ist vom anderen nicht trennbar: **Jede Ladung ist Quelle von Feldern und Felder sind *nur* durch ihre Wirkung auf Ladungen nachweisbar!**

**Ladungen sind immer an Materie mit nichtverschwindender Ruhemasse gebunden**, z.B. Elektronen, Protonen etc., **Felder können sich in Form von Licht durch den leeren, d.h. materiefreien Raum bewegen und Energie und Impuls transportieren.**

Eine umfassende und *vollständige* Theorie, die alle elektromagnetischen Phänomene, vor allem auch die atomaren, befriedigend erklärt - z.B. auch die universelle "Quantisierung" der elektrischen Ladung - gibt es bisher *nicht*, jedoch beschreibt die Maxwellsche Theorie ausgezeichnet die makroskopischen elektromagnetischen Erscheinungen.

Im atomaren Bereich müssen i.a. Quanteneffekte berücksichtigt werden (bei Abständen von ca.  $10^{-10}$  m und weniger).

Die elektrische Ladung hat eine atomistische Struktur: es gibt eine kleinste nichtverschwindende elektrische Ladungseinheit  $e_0 > 0$  und **alle in der Natur vorkommenden Ladungen sind positive oder negative ganzzahlige Vielfache  $Ze_0$  dieser Elementarladung  $e_0$ .**

Träger von  $+e_0$ : Proton, Positron, Deuteron etc.,

Träger von  $-e_0$ : Elektron, Antiproton etc.

Wahl der Vorzeichen ist historisch bedingte Konvention!

**Das Elektron ist das leichteste bekannte Teilchen** ( $m_e = 9,1093897(54) \cdot 10^{-31}$  kg), **das die Ladungseinheit  $-e_0$  trägt.** (Die in Klammern stehende 54 bedeutet den Fehler von einer Standardabweichung bezogen auf die beiden letzten Ziffern - hier 97 - der vorausgehenden Zahl!)

Leichtestes Teilchen mit Ladung  $+e_0$  ist das Positron, das sich vom Elektron *nur* durch das Vorzeichen der elektr. Ladung unterscheidet (sog. "Antiteilchen" vom Elektron; in unserer Umgebung des Kosmos überwiegen bei weitem die Elektronen).

Der tiefere Grund für die atomistische Struktur der Ladungen ist bisher nicht bekannt! Insbesondere weiß man nicht, warum physikalisch so unterschiedliche Teilchen wie Positron und Proton die genau gleiche elektrische Ladung haben!

Elektrische Ladungen haben folgende (u.a.) *voneinander unabhängige* wichtige Eigenschaften:

**Für die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems gilt ein Erhaltungssatz und: räumlich getrennte Ladungen üben Kräfte aufeinander aus:**

## 2.2 Elektrische Ladung als Erhaltungsgröße

### 2.2.1 Mikroskopische Formulierung

In einem isolierten System (z.B. einem Stück Materie) befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = t_0$   $N_+$  positive und  $N_-$  negative Elementarladungen, d.h. die **Gesamtladung des Systems** zum Zeitpunkt  $t_0$  ist:

$$Q(t_0) = N_+(t_0)e_0 - N_-(t_0)e_0 = (N_+(t_0) - N_-(t_0))e_0$$

Dann gilt folgender *Erhaltungssatz*:

**Die Größe  $Q(t_0)$  bzw.  $(N_+ - N_-)$  ist für ein isoliertes System zeitlich konstant**, d.h. jede Änderung von  $N_+$  wird durch eine entsprechende Änderung von  $N_-$  kompensiert!

**Beispiele:** Falls ein Elektron ( $N_- = 1$ ) in ein Proton ( $N_+ = 1$ ) "fällt", so entstehen ein Neutron ( $N_+ = N_- = 0$ ) und ein Neutrino ( $N_+ = N_- = 0$ ); oder: Falls Elektron und Positron "zusammenfallen", so "zerstrahlen" sie in Licht ( $N_+ = N_- = 0$ ).

Der Satz von der Erhaltung der Gesamtladung eines isolierten Systems ist ein Erfahrungssatz. Da das Elektron (bzw. das Positron) das leichteste aller geladenen Teilchen ist, **so hängt der Erhaltungssatz an der Stabilität des isolierten Elektrons** (bzw. Positrons). Messungen (Untersuchungen des durch Ladungserhaltung "verbotenen" Zerfalls Elektron  $\rightarrow$  Neutrino + Photon oder: Zerfall  $e^- \rightarrow 2\nu_e + \bar{\nu}_e$ ) haben ergeben: für die **Lebensdauer  $\tau_e$  des Elektrons gilt  $\tau_e \geq 10^{22}$  Jahre!!** (Alter des Kosmos:  $10^{10}$  Jahre!)

**Merke:** Satz von der Ladungserhaltung ist unabhängig davon, ob man  $e_0$  "messen" kann (dies geschieht erst durch das Coulombsche Gesetz), man muß nur die Anzahl der positiven und negativen Elementarladungen *abzählen*.

### 2.2.2 Makroskopische Formulierung des Satzes von der Erhaltung der Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems

Notation:  $O$  : fester Punkt im Raum,  $P$  : beliebiger Punkt.  $\vec{OP} = \vec{x}$  : "Ortsvektor" von  $P$ ;

$B(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ : orthogonale Basis in  $O$ .  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$\|\vec{OP}\| \equiv \|\vec{x}\| \equiv r$  : "Länge" von  $\vec{x}$ , gemessen in Metern [m].  $x_i$ : Kartesische Koordinaten.

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 \|\vec{e}_1\|^2 + x_2^2 \|\vec{e}_2\|^2 + x_3^2 \|\vec{e}_3\|^2, \quad \|\vec{e}_i\| = 1[m], \quad i = 1, 2, 3,$$

so daß

$$\|\vec{x}\| = +(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

Bei festen  $\vec{e}_i$  :  $\vec{x} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ . Ortsvektoren bilden 3-dim. Vektorraum (s. Mechanik-Skriptum).

Zeitkoordinate: t, gemessen in Sekunden [s].

Makroskopische Größenordnung von  $N_+, N_-$ : ca.  $10^{24}$ . Abstand der Atome: ca.  $10^{-10} m$ .

Dies legt **makroskopisch** folgende **Approximation** (mathem. Idealisierung!) nahe: *Ladungen sind kontinuierlich verteilt.*

Mathem. Präzisierung: Sei  $\Delta V$  das Volumen einer Umgebung des Punktes  $P$ , in der sich die Ladung  $q(\Delta V)$  zum Zeitpunkt t befindet; dann definiert man als **Ladungsdichte**:

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q(\Delta V)}{\Delta V} .$$

(Mathem.:  $\rho(\vec{x}, t)$  ist eine reellwertige Funktion von  $\vec{x}$  und t.) Ist G ein beschränktes räumliches Gebiet, dann ist

$$Q_t(G) = \int_G d^3x \rho(\vec{x}, t)$$

die zur Zeit t in G enthaltene Ladung.

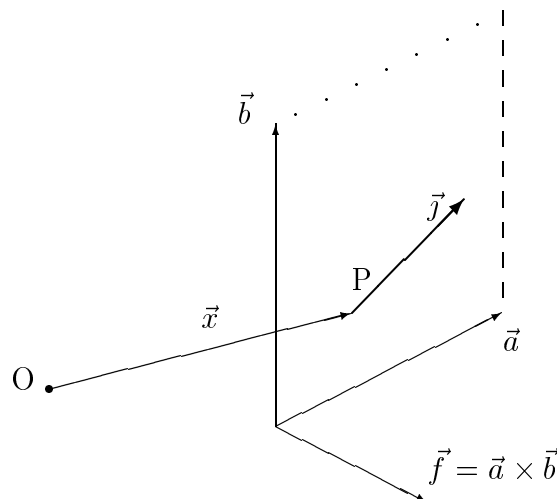
Es sei  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  die Geschwindigkeit der Ladungsträger am Orte  $\vec{x}$  zum Zeitpunkt t.

Def.:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) : \text{Stromdichte} .$$

Einfache Anwendung:

$\rho$  und  $\vec{v}$  seien von  $\vec{x}$  unabhängig und  $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{b}$  die orientierte Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms, wobei  $\|\vec{f}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$



Dann ist

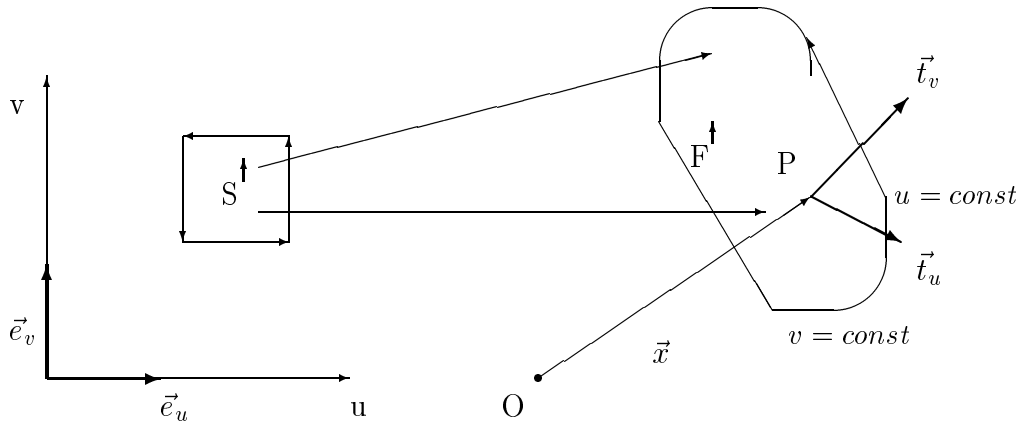
$$\vec{j} \cdot \vec{f} = \|\vec{j}\| \|\vec{f}\| \cos(\angle \vec{j}, \vec{f}) = I(\vec{f}; t)$$

der zur Zeit  $t$  durch die Fläche  $f$  hindurchtretende **"Stromfluß"**.

Anm.: Mathematiker nennen  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  eine **vektorwertige Funktion** von  $\vec{x}$  und  $t$ , während Physiker  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  als **"Vektorfeld"** bezeichnen.

Sei  $G$  ein (zeitlich unveränderliches) räumliches Gebiet. Dann kann sich wegen der Ladungserhaltung die in  $G$  vorhandene Gesamtladung  $\int_G d^3x \rho(\vec{x}, t)$  nur dadurch ändern, daß Ladungen durch die Oberfläche  $\partial G$  von  $G$  herein- oder herausfließen. Mathematische Formulierung mit Hilfe des "Oberflächen"-Integrals: Annahme:  $\partial G$  setze sich aus endlich vielen "glatten" orientierten Flächenstücken zusammen.

Definition eines glatten orientierten Flächenstückes  $F^\uparrow$ : Sei  $S^\uparrow$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet im  $R^2$  und  $F^\uparrow \subset R^3$  ein ein-eindeutiges Bild von  $S^\uparrow$ :



Dabei gilt  $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$  für  $\vec{x} \in F^\uparrow$ , wobei die  $x_i(u, v)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 1-mal stetig differenzierbare Funktionen von  $u$  und  $v$  seien.

Die **Tangentialvektoren**  $\vec{t}_u$  bzw.  $\vec{t}_v$  an die Kurven  $u = const.$  bzw.  $v = const.$  durch  $\vec{x}(u, v) \in F^\uparrow$  sind durch

$$\vec{t}_u(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{x}(u, v), \quad \vec{t}_v(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{x}(u, v)$$

gegeben und sind wegen der vorausgesetzten Eineindeutigkeit der Abb. immer linear unabhängig!

$S^\uparrow$  sei so orientiert, daß seine Normale durch  $\vec{e}_u \times \vec{e}_v$  gegeben ist und die Randkurve von  $S^\uparrow$  sei so orientiert, daß beim positiven Durchlauf von  $\text{Rd } S^\uparrow$  das Gebiet  $S^\uparrow$  immer links liegt.

Die Normale von  $F^\uparrow$  im Punkte  $\vec{x}(u, v)$  ist ein positives Vielfaches von  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$ , d.h. die Orientierung von  $S^\uparrow$  "induziert" eine Orientierung von  $F^\uparrow$ !

Ist  $\Delta u \Delta v$  die Fläche eines "kleinen" Rechteckes in der Umgebung von  $(u, v)$  in  $S^\uparrow$ , so entspricht ihm approximativ das orientierte Flächenelement  $\Delta \vec{f}(\vec{x}) \approx (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) \Delta u \Delta v$  in der Umgebung von  $\vec{x}(u, v) \in F^\uparrow$ .

Konsequenzen:

1. Der Flächeninhalt von  $F^\uparrow$  ist gegeben durch

$$\int_{F^\uparrow} \|\vec{df}\| \equiv \int_{S^\uparrow} \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\| du dv = \int_{S^\uparrow} [\vec{t}_u^2 \vec{t}_v^2 - (\vec{t}_u \cdot \vec{t}_v)^2]^{\frac{1}{2}} du dv.$$

2. Sei  $j(\vec{x}, t)$  die Stromdichte in  $\vec{x}(u, v) \in F^\uparrow$  zur Zeit  $t$ , dann fließt der Strom  $\Delta I \approx \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \Delta \vec{f}[\vec{x}(u, v)]$  durch  $\Delta \vec{f}$  in Richtung  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$ , d.h. **durch  $F^\uparrow$  fließt zur Zeit  $t$  der Strom**

$$I_t(F^\uparrow) = \int_{F^\uparrow} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} = \int_{S^\uparrow} \vec{j}[\vec{x}(u, v), t] \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv$$

Die Oberfläche  $\partial G$  eines beschränkten räumlichen Gebietes  $G$  läßt sich aus mehreren glatten Flächenstücken  $F_i^\uparrow$ ,  $i = 1, 2, \dots$  zusammensetzen. Ihre Orientierungen seien so gewählt, daß die Flächennormalen  $\vec{t}_{u_i} \times \vec{t}_{v_i}$  in  $\vec{x}(u_i, v_i)$  immer "nach außen" weisen. Dann bedeutet  $\vec{j} \cdot (\vec{t}_{u_i} \times \vec{t}_{v_i}) > 0$ : Positive Ladung fließt nach außen, bzw. negative Ladung nach innen.

**Der Satz von der Ladungserhaltung** kann nun so formuliert werden:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_G \rho(\vec{x}, t) d^3x = \int_{\partial G} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f}.$$

Es sei  $\partial_t \rho(\vec{x}, t)$ ,  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ , in einer Umgebung  $\Delta G$  mit Volumen  $\Delta V(\vec{x})$  stetig, dann gilt (Mittelwertsatz)

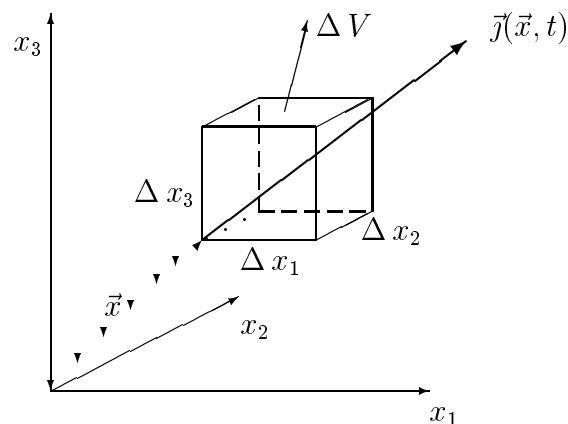
$$-\partial_t \rho(\vec{x}, t) \Delta V(\vec{x}) \approx \int_{\partial \Delta G} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f},$$

bzw.

$$-\partial_t \rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta V(\vec{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta G} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} \equiv \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t)$$

Dies ist die "lokale" Form des Satzes von der Ladungserhaltung.

Berechnung von  $\operatorname{div} \vec{j}$  ("Divergenz" des Vektorfeldes  $\vec{j}(t, \vec{x})$ ) für kartesische Koordinaten, bei denen  $\Delta G$  die Form eines Quaders mit den Seitenlängen  $\Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , hat:



$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta G} \vec{j} \cdot d\vec{f} &\approx j_1(x_1 + \Delta x_1, \dots) \Delta x_2 \Delta x_3 \\
&+ j_2(\dots, x_2 + \Delta x_2, \dots) \Delta x_1 \Delta x_3 \\
&+ j_3(\dots, x_3 + \Delta x_3) \Delta x_1 \Delta x_2 \\
&- j_1(\vec{x}) \Delta x_2 \Delta x_3 - j_2(\vec{x}) \Delta x_1 \Delta x_3 - j_3(\vec{x}) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots
\end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) = \partial_1 j_1(\vec{x}, t) + \partial_2 j_2(\vec{x}, t) + \partial_3 j_3(\vec{x}, t), \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

Die "feldtheoretische" ("lokale") Formulierung

$$\boxed{\partial_t \rho(\vec{x}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) = 0}$$

von der Erhaltung der Ladung bezeichnet man auch als "**Kontinuitätsgleichung**".

Sei  $G$  ein Gebiet  $\subset R^3$  mit einem Rand  $\partial G$ , der aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht. Dann ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$\int_{\partial G} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_G \operatorname{div} \vec{j} d^3 x$$

Dies ist Spezialfall des **Gaußschen Satzes für vektorwertige Funktionen**:

Ist  $\vec{A}(\vec{x})$  ein in  $G$  stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt

$$\boxed{\int_{\partial G = \sum_{i=1}^n F_i^\uparrow} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{f} \equiv \sum_{i=1}^n \int_{S_i^\uparrow} \vec{A}[\vec{x}(u_i, v_i)] \cdot (\vec{t}_{u_i} \times \vec{t}_{v_i}) du_i dv_i = \int_G \operatorname{div} \vec{A}(\vec{x}) d^3 x,$$

wobei  $F_i^\uparrow$  stetig differenzierbares Bild von  $S_i^\uparrow = (u_i, v_i) \subset R^2$  mit  $\vec{t}_{u_i} \times \vec{t}_{v_i} \neq 0$ .

Das Oberflächenintegral ist von der speziellen Form der Parametrisierung  $\vec{x}(u_i, v_i)$  unabhängig (s. Übungen).

## 2.3 Kräfte zwischen Ladungen

Ladungen lassen sich nicht nur *abzählen* (als Vielfache der Ladung vom Elektron), sondern auch *messen* (bezüglich bestimmter Einheiten), da räumlich getrennte Ladungen *Kräfte* aufeinander ausüben:

Zunächst sei  $\vec{j}(\vec{x}, t) = 0$  für alle  $\vec{x}$  und  $t$ . Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho(\vec{x}, t) = 0$ , d. h.  $\rho(\vec{x}, t)$  ist zeitlich konstant: **Elektrostatik**.

Seien  $q_1$  und  $q_2$  die Ladungen in "kleinen" Umgebungen  $\Delta G_i$  von den Punkten  $P_i$  mit Ortsvektoren  $\vec{x}_i$ ; d.h. für den Durchmesser  $d_i$  von  $\Delta G_i$  gilt  $d_i \ll \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$ ,  $i = 1, 2$ . Im Limes  $d_i \rightarrow 0$  spricht man von "Punktladungen" in  $\vec{x}_i$ . Ferner sei  $\rho(\vec{x}) \equiv 0$  für  $\vec{x} \notin \Delta G_i$ . Dann übt die "statische" Ladung  $q_2$  auf  $q_1$  die Kraft (**Coulombsches Gesetz**)

$$\boxed{\vec{K}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}}$$

aus . Die Konstante  $\varepsilon_0$  hängt von der Wahl der Einheiten ab: man kann (wie Gauß)  $\varepsilon_0 = 1/4\pi$  setzen und dann die Ladung in Einheiten  $(\text{dyn cm}^2)^{\frac{1}{2}} = \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{s}^{-1} \text{g}^{\frac{1}{2}}$  messen. Man erhält dann für die Elementarladung:

$$e_0 = 4.80 \dots 10^{-10} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ s}^{-1} \text{ g}^{\frac{1}{2}}$$

Die Techniker und Experimentalphysiker benutzen jedoch i.a. andere Einheiten: **Grundeinheit (außer m, s und kg): Stromstärke** (Ladungen pro Sekunde), gemessen in Ampere [A]. Die Einheit der Ladung ist jetzt: Ampere · Sekunde = "Coulomb". Jetzt muß man  $\varepsilon_0$  *experimentell* bestimmen. Messungen ergeben:

$$\varepsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ A s m}^{-1} \text{ V}^{-1}, \quad \text{V} = \text{Volt} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$$

Für die Elementarladung  $e_0$  erhält man nun:

$$e_0 = 1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ A s}$$

### 2.3.1 Eigenschaften der Coulomb-Kräfte

1.  $\vec{K}_{12} = -\vec{K}_{21}$  ("actio = reactio")
2. Gleichartige Ladungen,  $q_1 q_2 > 0$ , stoßen sich ab, ungleichartige,  $q_1 q_2 < 0$ , ziehen sich gegenseitig an.
3. **Zur experimentellen Genauigkeit:** Untersucht wurden die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz für  $r = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \rightarrow \infty$  und für  $r \rightarrow 0$ .  
*Große Abstände:* Hier parametrisiert man mögliche Abweichungen vom Coulomb-Gesetz in der Form

$$\|\vec{K}_{12}\| = \text{const.} \cdot \frac{1}{r^2} e^{-\mu r}.$$

Man kann zeigen, daß der Parameter  $\mu$  physikalisch als inverse Compton-Wellenlänge des Photons interpretiert werden kann:

$$\mu = \frac{1}{\lambda_c(\gamma)} = \frac{m_\gamma c}{\hbar},$$

wobei  $m_\gamma$  die Ruhemasse des Photons ist. Aus verschiedenen Messungen ergeben sich die folgenden oberen Schranken für  $m_\gamma$ :

Messungen am Kugelkondensator (1971):  $m_\gamma \leq 1,6 \cdot 10^{-47} \text{ g}$ .

Messungen des magnetischen Dipolfeldes vom Jupiter mittels Raumsonden (1975):  $m_\gamma \leq 8 \cdot 10^{-49} \text{ g}$ .

Rechnungen zur Stabilität von Galaxien in Zusammenhang mit den dort vorhandenen magnetischen Feldern:  $m_\gamma \leq 10^{-59} \text{ g}$ .

*Kleine atomare Abstände* ( $r \leq 10^{-10} \text{ cm}$ ): Hier bekommt man Modifikationen der  $1/r$ -Singularität des Coulomb-Gesetzes durch relativistische Quanteneffekte, die z.B. zu einer zusätzlichen Aufspaltung von Wasserstofflinien führen.

4. Superposition von Kräften: Sind  $q_i$  statische "Punktladungen" an den Raumpunkten  $\vec{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und ist  $q$  eine Punktladung im Raumpunkt  $\vec{x}$ , so ergibt sich für die Gesamtkraft  $\vec{K}(q, \vec{x})$  durch Vektoraddition ("Superposition") der Einzelkräfte  $\vec{K}_i$ :

$$\vec{K}(q, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|^3}.$$

Diese Gleichung gilt nur dann, falls das "Hereinbringen" der Ladung  $q$  die Ladungen  $q_i$  räumlich *nicht* verschiebt. **Gegenbeispiel:**  $q_i$  seien Ladungen in einer nach außen neutralen metallischen Kugel, in der sich die Ladungen  $q_i$  frei bewegen können. Bringt man nun  $q$  in die Nähe der Metallkugel, so verschieben sich die  $q_i$  derart, daß  $q$  von der Metallkugel mit einer Kraft angezogen wird, die proportional zu  $q^2$  ist! (nicht, wie oben proportional zu  $q$ ). Der Grund hierfür ist "Influenz" (s. weiter unten).

Verallgemeinerung: die Ladungsdichte  $\rho(\vec{y})$  sei in einem beschränkten Gebiet  $G$  von Null verschieden:  $\rho(\vec{y}) \neq 0$  für  $\vec{y} \in G$ , dann wirkt auf eine Ladung  $q$  im Punkt  $\vec{x} \notin G$  die Kraft

$$\vec{K}(q, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_G \frac{\rho(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d^3y.$$

Sind die Ladungen nicht räumlich sondern *flächenhaft* verteilt, so tritt an die Stelle der räumlichen Ladungsdichte  $\rho$  die Flächendichte: es sei  $F^\uparrow$  ein Flächenstück und  $\Delta f = \|\Delta \vec{f}\|(\vec{y})$  eine Umgebung  $\subset F^\uparrow$  von  $\vec{y} \in F^\uparrow$ , in der sich die Ladung  $\Delta q$  befindet, dann ist

$$\omega(\vec{y}) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta f}$$

die Flächendichte der Ladung in  $\vec{y}$ .

Sei  $F^\uparrow$  ein endliches glattes Flächenstück und  $q$  eine Ladung in  $\vec{x} \notin F^\uparrow$ , dann gilt analog zu oben

$$\vec{K}(q, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{F^\uparrow} \frac{\omega(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \|d\vec{f}\|.$$

# Kapitel 3

## Statische Elektrische Felder

Das Coulombsche Gesetz ist zunächst formuliert für Kräfte zwischen Ladungen an verschiedenen Raumpunkten (sogenannte **”Fernwirkungstheorie”**). Es läßt sich jedoch in folgendem (**”feldtheoretischen”**) Sinne uminterpretieren:

Die obigen Ausdrücke für die Kraft  $\vec{K}(q, \vec{x})$  ”faktorisieren” in 2 Größen:

$$\begin{aligned} \vec{K}(q, \vec{x}) &= q \vec{E}(\vec{x}), \text{ wobei} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|^3}, \\ \text{oder } \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G \frac{\rho(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} d^3y, \\ \text{bzw. } \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_F \frac{\omega(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \|d\vec{f}\|(\vec{y}). \end{aligned}$$

Hier hängt der 1. Faktor  $q$  nur von der Gesamtladung  $q$  des ”Massenpunktes” in  $\vec{x}$  ab und  $\vec{E}(\vec{x})$  nur von den  $q_i$  bzw.  $\rho(\vec{y})$  und ihren Lagen  $\vec{x}_i$  bzw.  $\vec{y}$ .

Man bezeichnet  $\vec{E}(\vec{x})$  als **die von den Ladungen  $q_i$  (bzw.  $\rho, \omega$ ) erzeugte elektrische Feldstärke!**

Der entscheidende Fortschritt (dies wird erst später deutlich) entstand (durch Faraday und Maxwell) in der Elektrodynamik dadurch, daß man dem Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  eine eigene physikalische ”Existenz” zuschrieb, unabhängig davon, ob die ”Test”-Ladung  $q$  in  $\vec{x}$  vorhanden ist oder nicht!!

**Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{x})$  ist eine vektorwertige Funktion bzw. ein ”Vektorfeld”, das sich so bestimmen läßt:**

1. Durch Messung der Kraft  $\vec{K}(q, \vec{x})$  auf eine an den Punkt  $\vec{x}$  gebrachte ”Probe”-Ladung  $q$ . Hierbei ist u.a. wichtig, daß das mit der Testladung  $q$  selbst verknüpfte elektrische Feld gegenüber  $\vec{E}(\vec{x})$  vernachlässigbar ist, da man sonst etwas anderes als  $\vec{E}(\vec{x})$  (ohne  $q$ ) messen würde, d. h. man ist an

$$\vec{E}(\vec{x}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \vec{K}(q, \vec{x})$$

interessiert.  $\vec{E}$  wird hier als ”äußeres” Feld betrachtet! Da i.a. die Probekörper, auf denen die Testladungen sitzen, eine endliche Ausdehnung haben,

so lassen sich dann auch nur Mittelwerte  $\langle \vec{E} \rangle (\vec{x})$  messen, wobei über das Volumen des Probekörpers gemittelt ist.

2. Falls man die Ladungsverteilungen  $q_i(\vec{x}_i)$ , bzw.  $\rho(\vec{x})$  genau kennt, dann kann man  $\vec{E}(\vec{x})$  berechnen.

### 3.1 Gaußscher Satz über Felder und Ladungen

Frage: Gegeben sei ein Gebiet  $G$  mit Rand  $\partial G$ . Bekannt sei die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{x})$  für  $\vec{x} \in \partial G$ ; was läßt sich über die Ladungen in  $G$  sagen?  $G$  enthalte den Punkt  $\vec{x} = 0$  im Innern und dort (und zunächst nur dort) befinde sich die Ladung  $q$ , und damit im Punkte  $\vec{x}$  das Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}.$$

Für  $\vec{x} \neq 0$  gilt

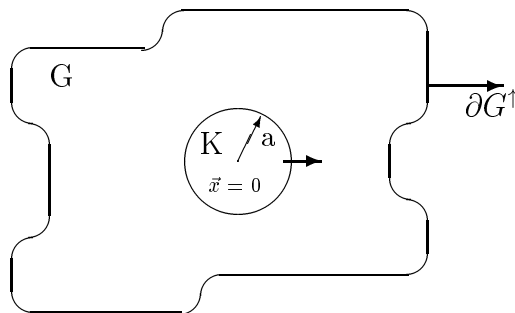
$$\partial_i \left( \frac{x_i}{\|\vec{x}\|^3} \right) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} - 3 \frac{(x_i)^2}{\|\vec{x}\|^5}, \quad i = 1, 2, 3,$$

und damit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \partial_i E_i(\vec{x}) = 0, \quad \text{falls } \vec{x} \neq 0.$$

Für  $\vec{x} = 0$  ist  $\operatorname{div} \vec{E}$  wegen der Singularität des Nenners von  $\vec{E}$  zunächst nicht definiert.

Ausweg:



Da  $\vec{x} = 0$  im Innern von  $G$  liegt, so gibt es immer eine Kugel  $K$  vom Radius  $a$  mit Oberfläche  $O_K^\uparrow$ , die den Mittelpunkt  $\vec{x} = 0$  hat und ebenfalls ganz in  $G$  liegt. Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf  $G - K$  ergibt

$$0 = \int_{G-K} \operatorname{div} \vec{E} d^3x = \int_{\partial(G-K)^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial G^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} - \int_{\partial K^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f}.$$

Anmerkung: Bei  $\partial(G - K)^\uparrow$  zeigt die Normale von  $O_K$  in die Kugel, bei  $\partial K^\uparrow$  aus ihr heraus!

Wegen

$$\int_{O_K^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_{O_K} \|d\vec{f}\| = \frac{q}{\epsilon_0}$$

erhält man

$$\boxed{\epsilon_0 \int_{\partial G^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} = q}$$

Befinden sich innerhalb des Gebietes  $G$   $n$  verschiedene Ladungen  $q_1, \dots, q_n$ , so ergibt sich analog

$$\boxed{\epsilon_0 \int_{\partial G^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum_{i=1}^n q_i = Q(G)}$$

Def.: Man nennt

$$\int_{\partial G^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

den **”Fluß der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  durch die Fläche  $\partial G^\uparrow$ ”**.

Die obige Formel enthält die fundamentale Aussage: **Der Fluß der elektrischen Feldstärke durch die Oberfläche eines Gebietes ist ein unmittelbares Maß ( $=Q(G)/\epsilon_0$ ) für die im Gebiet vorhandenen Ladungen!!** (Gauß).

### 3.1.1 Die Diracsche Delta-”Funktion”

Die gerade diskutierten Beziehungen lassen sich mathematisch folgendermaßen interpretieren:

Die Gleichung

$$\epsilon_0 \int_{\partial G^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{f} = q$$

ergibt sich **formal** aus dem Gaußschen Satz, falls

$$\int_{\partial G} \frac{\vec{x} \cdot d\vec{f}}{4\pi\|\vec{x}\|^3} = \frac{1}{4\pi} \int_G d^3x \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = \begin{cases} 1, & \text{für } \vec{x} = 0 \in G \\ 0, & \text{für } \vec{x} = 0 \notin G \end{cases}$$

Präzisierung: Man definiert

$$\boxed{\delta(\vec{x}) \equiv \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{4\pi\|\vec{x}\|^3} = -\operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \frac{1}{4\pi\|\vec{x}\|} \right) = -\Delta \frac{1}{4\pi\|\vec{x}\|},}$$

wobei

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Die Größe  $\delta(\vec{x})$  ist **keine** Funktion im üblichen Sinne, jedoch eine wohldefinierte mathematische Größe:

Sei  $\chi(\vec{x})$  eine Funktion, die (hier) mindestens einmal stetig differenzierbar ist und die für  $\|\vec{x}\| \geq a$  verschwindet (Beispiel:  $\chi(\vec{x}) = \exp(-a^2/(a^2 - \|\vec{x}\|^2))$  für  $r \equiv \|\vec{x}\| < a$ , und  $\chi(\vec{x}) = 0$  für  $r \geq a$ ), dann hat man für ein Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{x})$  wegen

$$\operatorname{div}(\chi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \chi + \chi \operatorname{div} \vec{A}$$

die Relation

$$\int_{\partial G} \chi \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_G \operatorname{div}(\chi \vec{A}) d^3x = \int_G \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \chi d^3x + \int_G \chi \operatorname{div} \vec{A} d^3x.$$

Wählt man  $\chi$  so, daß  $\chi(\vec{x}) = 0$  für  $\vec{x} \in \partial G$ , dann ist  $\int_{\partial G} \chi \vec{A} \cdot d\vec{f} = 0$ , d.h.

$$\int_G \chi(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{A} d^3x = - \int_G \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \chi d^3x.$$

Diese Gleichung wird zur Definition des "Funktionals" oder der "Distribution"  $\delta(\vec{x})$  benutzt:

$$\delta_{\vec{x}=0}[\chi] \equiv \int d^3x \chi(\vec{x}) \delta(\vec{x}) = \int d^3x \chi(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \operatorname{grad} \chi d^3x.$$

Die Berechnung des Integrals erfolgt mittels Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ x_3 &= r \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Mit  $\tilde{\chi}(r, \varphi, \vartheta) \equiv \chi(\vec{x})$  gilt:  $\vec{x} \cdot \operatorname{grad} \chi = r \partial \tilde{\chi} / \partial r$ . Wegen

$$d^3x = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot \operatorname{grad} \chi d^3x &= -\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dr \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\chi}(r, \varphi, \vartheta) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \underbrace{[\tilde{\chi}(r = \infty, \varphi, \vartheta) - \tilde{\chi}(r = 0, \varphi, \vartheta)]}_{=0} \\ &= \chi(\vec{x} = 0), \end{aligned}$$

da  $\tilde{\chi}(r = 0, \varphi, \vartheta) = \chi(\vec{x} = 0)$ . Es gilt also

$$\boxed{\delta_{\vec{x}=0}[\chi] \equiv \int d^3x \chi(\vec{x}) \delta(\vec{x}) = \chi(0)}$$

Die zunächst formal eingeführte Größe  $\delta(\vec{x})$  hat demnach folgende inhaltliche Bedeutung:

**Ist  $\chi(\vec{x})$  eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion, die für  $r \rightarrow \infty$  hinreichend stark verschwindet, ( $\chi$  heißt auch "Testfunktion"), so bedeutet  $\delta(\vec{x})$ , bzw.  $\delta_0[\chi]$  ein sogenanntes "Funktional", "Distribution" oder "Verallgemeinerte Funktion", die der Funktion  $\chi(\vec{x})$  ihren (reellen oder komplexen) Wert  $\chi(\vec{x} = 0)$  zuordnet.**

Anmerkung: In dieser Weise kann man das  $\delta$ -Funktional - das in der physikalischen Literatur als "**Diracsche  $\delta$ -Funktion**" bezeichnet wird - natürlich auch in einer,

zwei etc. Dimension einführen.

Ist  $\vec{b}$  ein beliebiger Raumpunkt, so definiert man

$$\delta_{\vec{b}}[\chi] = \int d^3x \chi(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{b}) = \int d^3x \chi(\vec{x} + \vec{b}) \delta(\vec{x}) = \chi(\vec{b})$$

Aus der Definition von  $\delta(\vec{x})$  folgt

$$\delta(-\vec{x}) = \delta(\vec{x}), \quad \delta(\lambda\vec{x}) = \lambda^{-3} \delta(\vec{x}), \quad \lambda > 0;$$

Die Distribution  $\delta_{\vec{b}}(\vec{x}) = \chi(\vec{b})$  ist auch definiert, falls  $\chi$  nur **stetig** ist!

### 3.1.2 Ladungen als Quellen von elektrischen Feldern

Ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|^3},$$

so gilt

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Anstatt diskreter Ladungen  $q_1, \dots, q_n$  sei eine einmal stetig differenzierbare Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x})$  gegeben, die außerhalb eines beschränkten Gebietes  $G$  verschwindet. Zunächst gilt für  $\vec{x} \notin G$ :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G d^3y \rho(\vec{y}) \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}.$$

Die rechte Seite existiert jedoch auch für  $\vec{x} \in G$ ! Beweis: Man lege um den Punkt  $\vec{x}$  eine kleine Kugel  $K$  mit Radius  $a$ , so daß  $K \subset G$ . Das Integral

$$\int_K d^3y \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} = \int_K d^3z \frac{-\vec{z}}{\|\vec{z}\|^3}, \quad \vec{z} = \vec{y} - \vec{x},$$

existiert, da zwar der Integrand wie  $\|\vec{z}\|^{-2}$  bei  $\vec{z} = 0$  singulär wird, das Volumen des Integrationsgebietes jedoch wie  $\|\vec{z}\|^3$  gegen Null geht! Aufgrund des Mittelwertsatzes gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_K d^3y \rho(\vec{y}) \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} = \rho(\vec{x}) \lim_{a \rightarrow 0} \int_K d^3z \frac{-\vec{z}}{\|\vec{z}\|^3} = 0,$$

d.h. bei **stetigem**  $\rho(\vec{x})$  trägt der Punkt  $\vec{x} = \vec{y}$  zu dem obigen Integral über  $G$  nicht bei.

Für  $\operatorname{div} \vec{E}$  erhält man

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G d^3y \rho(\vec{y}) \operatorname{div}_x \left( \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right).$$

( $\operatorname{div}_x =$  Divergenz-Bildung bezüglich  $\vec{x}$ .) Wegen

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div}_x \left( \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \delta(\vec{y} - \vec{x})$$

erhält man, da  $\rho(\vec{y})$  als "Testfunktion" interpretiert werden kann,

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3 y \rho(\vec{y}) \delta(\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta_{\vec{x}}[\rho] = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}).$$

Als "lokale" Beziehung zwischen  $\vec{E}(\vec{x})$  und  $\rho(\vec{x})$  haben wir demnach die fundamentale Gleichung

$$\boxed{\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) .}$$

Ist  $\rho(\vec{x})$  vorgegeben, so hat man umgekehrt (s. oben):

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}}$$

und wegen  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi$ , genügt  $\varphi(\vec{x})$  der Gleichung

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}) .}$$

Man nennt  $\varphi$  "elektrisches Potential" (s. unten)

Bemerkung: Bei Punktladungen kann man (formal)

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

definieren.

Bisher ist  $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$  für Punktladungen und Raumladungen definiert, es fehlen noch die Flächenladungen:

Es sei weiterhin  $\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{x})$ , wobei  $\varphi(\vec{x})$  **überall** stetig sein soll, im Unendlichen mindestens wie  $\|\vec{x}\|^{-1}$  verschwinden und ferner  $\vec{E}(\vec{x})$  für große  $\|\vec{x}\|$  mindestens wie  $\|\vec{x}\|^{-2}$  abfallen soll.

Sind  $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})$  zwei Funktionen, so gilt

$$\operatorname{div}(f_1 \cdot \operatorname{grad} f_2) = (\operatorname{grad} f_1)(\operatorname{grad} f_2) + f_1 \operatorname{div}(\operatorname{grad} f_2).$$

Subtrahiert man hiervon  $\operatorname{div}(f_2 \operatorname{grad} f_1)$ , so erhält man

$$\operatorname{div}(f_1 \operatorname{grad} f_2 - f_2 \operatorname{grad} f_1) = f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1,$$

und durch Integration die Formel (Green)

$$\boxed{\int_{\partial G} (f_1 \operatorname{grad} f_2 - f_2 \operatorname{grad} f_1) \cdot d\vec{f} = \int_G (f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1) d^3 x .}$$

Anwendung auf

$$f_1 = \varphi(\vec{x}), f_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} :$$

Da  $\Delta\varphi(\vec{x}) = -\rho(\vec{x})/\varepsilon_0$ ,  $\Delta f_2 = -\delta(\vec{x} - \vec{y})$ , so folgt

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left( \frac{\vec{E}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \varphi(\vec{y}) \right) \cdot d\vec{f}(\vec{y}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \begin{cases} \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in G - \partial G \\ 0 & \text{für } \vec{x} \notin G \end{cases}$$

Bemerkung: Sitzen auf dem Rande  $\partial G$  Flächenladungen, so wird  $E(\vec{x})$  dort i.a. nicht stetig sein. Bei dem obigen Oberflächenintegral ist dann  $\vec{E}_i \equiv \vec{E}_{\text{innen}}$  zu nehmen.

Da  $G$  beschränkt ist, so gibt es eine Kugel  $K$  mit Radius  $a$  derart, daß  $G \subset K$ . Analog zu oben erhält man:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial(K-G)} \left[ \vec{E}(\vec{y}) \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \varphi(\vec{y}) \right] \cdot d\vec{f}(\vec{y})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K} (\dots) \cdot d\vec{f}(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} (\dots) \cdot d\vec{f}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{K-G} \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d^3y - \begin{cases} \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in (K - G) - \partial(K) \\ 0 & \text{für } \vec{x} \notin (K - G) \end{cases}$$

**Hier** ist bei dem Integral über  $\partial G$  für die Feldstärke  $\vec{E} = \vec{E}_a \equiv \vec{E}_{\text{außen}}$  zu nehmen! Im Limes  $a \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral über  $\partial K$ , da der Integrand mindestens wie  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-3}$  gegen Null geht, die Oberfläche von  $K$  aber nur wie  $\|\vec{y}\|^2$  anwächst! Also gilt:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left( \vec{E}_a(\vec{y}) \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \varphi(\vec{y}) \right) \cdot d\vec{f}(\vec{y})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R^3-G} d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \begin{cases} \varphi(\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in (R^3 - G) \\ 0 & \text{für } \vec{x} \notin R^3 - G \end{cases}$$

Addiert man die Integrale über  $G$  und  $R^3 - G$ , so bekommt man

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R^3} d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{(\vec{E}_a - \vec{E}_i)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \cdot d\vec{f}(\vec{y}).$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist von früher her bekannt. Der zweite ist folgendermaßen zu interpretieren: Für  $\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}\varphi(\vec{x})$  erhält man

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot d\vec{f}(\vec{y}).$$

Ist  $\vec{n}(\vec{y}) (= \vec{t}_u \times \vec{t}_v / \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|)$  der nach außen zeigende Flächennormalen-Vektor im Punkte  $\vec{y}$ , so folgt (s. Kap. 2.3.1, Ziffer 4):

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_0(\vec{E}_a(\vec{y}) - \vec{E}_i(\vec{y})) \cdot \vec{n}(\vec{y}) &= \omega(\vec{y}), \\ \omega &: \text{Flächendichte der Ladung.} \end{aligned}}$$

Zusammenstellung der wichtigsten bisherigen Formeln über den Zusammenhang zwischen Ladungsverteilungen und den zugehörigen statischen Feldern:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{y}_i), \text{ oder} \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) &= \rho(\vec{x}), \text{ oder} \\ \varepsilon_0(\vec{E}_a - \vec{E}_i)(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= \omega(\vec{x}). \end{aligned}}$$

### Einige einfache Anwendungen

1. Es sei  $\vec{E} = \text{const.}$ , dann ist  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , d.h. ein konstantes elektrisches Feld kann es nur dort geben, wo  $\rho(\vec{x}) = 0$ . Allerdings folgt aus  $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0$  *nicht*, daß  $\vec{E} = \text{const.}$ .  
Ist dagegen  $\vec{E} = \lambda \vec{x}$ , so folgt  $\operatorname{div} \vec{E} = 3\lambda = \text{const.}$  In diesem Falle ist  $\rho = 3\varepsilon_0\lambda = \text{const.}$ .
2.  $\rho(\vec{y})$  hänge nur von  $\eta \equiv \|\vec{y}\|$  ab, dann hat

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G \frac{\rho(\eta)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d^3y$$

nur eine Komponente in  $\vec{x}$ -Richtung:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = E_r \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \text{ für } \rho = \rho(\|\vec{y}\|),}$$

falls auch das Gebiet  $G$  allein mit Hilfe des Abstandes  $\eta$  beschrieben werden kann.

Beweis: Man führe räumliche Polarkoordinaten  $y_1 = \eta \cos \alpha \sin \vartheta$ ,  $y_2 = \eta \sin \alpha \sin \vartheta$ ,  $y_3 = \eta \cos \vartheta$  so ein, daß die  $y_3$ -Achse mit der durch den (festen!) Vektor  $\vec{x}$  definierten Richtung zusammenfällt. Dann wird  $\|\vec{x} - \vec{y}\| = (r^2 + \eta^2 - 2r\eta \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}$  und

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G d\eta d\alpha d\vartheta \eta^2 \sin \vartheta \frac{\rho(\eta)}{(r^2 + \eta^2 - 2r\eta \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}}$$

Da das Gebiet  $G$  nicht von den Winkeln abhängen soll, so läßt sich die Integration über  $\alpha$  sofort ausführen:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int^{f(\eta)} d\eta \int_0^\pi d\vartheta \frac{\eta^2 \sin \vartheta \rho(\eta)}{(r^2 + \eta^2 - 2r\eta \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hierbei beschreibt die Funktion  $f(\eta)$  die nach Voraussetzung nur vom Abstände  $\eta$  abhängige Begrenzung des Integrationsgebietes  $G$ . Setzt man  $z = \cos \vartheta$ , so folgt wegen

$$\frac{d}{dz}(r^2 + \eta^2 - 2r\eta z)^{\frac{1}{2}} = -r\eta (r^2 + \eta^2 - 2r\eta z)^{-\frac{1}{2}},$$

daß

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{2\varepsilon_0 r} \int^{f(r)} d\eta \eta \rho(\eta) [(r^2 + \eta^2 - 2r\eta z)^{1/2}]_{-1}^{+1} = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int^{f(r)} d\eta \eta^2 \rho(\eta),$$

und daher  $\varphi(\vec{x}) = \varphi(r)$ .

Man kann  $E_r(r)$  auch einfach mittels des Gaußschen Satzes aus  $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})/\varepsilon_0$  berechnen:

Integration über die Oberfläche  $O(r)$  einer Kugel  $K(r)$  vom Radius  $r$  ergibt

$$\int_{O(r)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = E_r(r) \int_{O(r)} \|d\vec{f}\| = 4\pi r^2 E_r(r).$$

Andererseits erhalten wir für die Ladung in der Kugel :

$$Q(r) = \int_{K(r)} d^3y \rho(\eta) = 4\pi \int_0^r d\eta \eta^2 \rho(\eta).$$

Der Gaußsche Satz liefert dann

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}, \quad Q(r) = 4\pi \int_0^r d\eta \eta^2 \rho(\eta).$$

Spezialfall:

Sei  $\rho = \text{const.} \neq 0$  für  $r \leq a$  und  $\rho = 0$  für  $r > a$  dann gilt

$$E_r(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r \quad \text{für } r < a,$$

$$E_r(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho a^3 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \text{für } r \geq a,$$

wobei  $Q$  die Gesamtladung. Das Resultat besagt, daß eine Testladung sich im *Innern* der Kugel im Kraftfeld eines radialsymmetrischen harmonischen Oszillators und **außerhalb** wie im Feld einer Punktladung  $Q$  bewegt.

3. **Flächenladungen:** Die  $(x_1, x_2)$ -Ebene sei mit Ladungen der Dichte  $\omega = \text{const.} \neq 0$  belegt. Dann haben wir

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} dy_1 dy_2.$$

Variablensubstitution  $\vec{u} = \vec{y} - \vec{x} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, -x_3)$ ,  $y_3 = 0$  ergibt:

$$E_{1,2}(\vec{x}) = -\frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{1,2}}{\|\vec{u}\|^3} du_1 du_2,$$

$$E_3(\vec{x}) = \frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} x_3 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_1 du_2}{(u_1^2 + u_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mittels Variablensubstitution  $u_1 \rightarrow -u_1, u_2 \rightarrow -u_2$  sieht man, daß  $E_{1,2} = -E_{1,2} = 0$ . Die Einführung von Zylinderkoordinaten ( $u_1 = \eta \cos \vartheta, u_2 = \eta \sin \vartheta$ ) ergibt

$$E_3(\vec{x}) = \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0} x_3 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\eta d\eta d\vartheta}{(\eta^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega}{2\epsilon_0} x_3 \left[ -\frac{1}{(\eta^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty,$$

$$E_3 = \frac{1}{2\epsilon_0} \omega \frac{x_3}{|x_3|} = \begin{cases} \frac{\omega}{2\epsilon_0} & \text{für } x_3 > 0 \\ -\frac{\omega}{2\epsilon_0} & \text{für } x_3 < 0 \end{cases}$$

d.h.  $E_3$  macht an der Ebene  $x_3 = 0$  den Sprung  $\Delta E_3 = \omega/\epsilon_0$ , entsprechend der Formel  $\epsilon_0(\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n} = \omega$ . ( $\vec{n}$  weist hier in die positive  $x_3$ -Achse!). Das zugehörige Potential ist (bis auf eine additive Konstante) :

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{\omega}{2\epsilon_0} |x_3|$$

### Bemerkungen:

1. Das Integral

$$I_1(x_3) \equiv \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_1 du_1 du_2}{(u_1^2 + u_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist so zu verstehen (symmetrische Integration!): Für  $x_3 \neq 0$  definiert man:

$$I_1(x_3) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \frac{u_1 du_1 du_2}{(u_1^2 + u_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

oder

$$I_1(x_3) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{+a} \int_0^{2\pi} \frac{\eta^2 \cos \varphi d\eta d\varphi}{(\eta^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

(da  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0!$ ). Frage: Wie hat man für  $x_3 = 0$  vorzugehen? Antwort: man gehe (aus physikalischen Gründen!) von einer Ladungsschicht mit **endlicher** Dicke  $d$  aus. Dann ist in der Mitte der Schicht  $\vec{E} = 0$  (Nachrechnen!). Dies bleibt so für  $d \rightarrow 0$ . Deshalb setzen wir

$$\vec{E}(\vec{x}) = 0 \text{ für } x_3 = 0, x_1, x_2 \text{ beliebig!}$$

2. Man bringe eine **zweite** mit der Ladungsdichte  $-\omega$  belegte **nicht** leitende Ebene in den Abstand  $d$  von der ersten (parallel zueinander). Dann addieren sich die Felder und man hat:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= 0 \text{ für } x_3 < 0, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= (0, 0, \omega/\epsilon_0) \text{ für } 0 < x_3 < d, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= 0 \text{ für } x_3 > d. \end{aligned}$$

Das von der ersten Ebene in einem Punkt der zweiten Ebene erzeugte Feld ist  $(0, 0, \omega/2\varepsilon_0)$ . Auf einem Flächenstück  $\Delta f$  der 2. Platte befindet sich die Ladung  $-\omega\Delta f$ , d.h. auf dieses Flächenstück wirkt die Kraft

$$\vec{K}_{\Delta f} = -\omega\Delta f(0, 0, \omega/2\varepsilon_0) = (0, 0, -\omega^2/2\varepsilon_0)\Delta f .$$

Dieser Ausdruck legt es nahe, folgende **”Flächenkraft-Dichte”** zu definieren:

$$\vec{k} = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \vec{K}_{\Delta f} = (0, 0, -\omega^2/2\varepsilon_0) .$$

Die Verallgemeinerung wird im nächsten Kapitel beschrieben.

## 3.2 Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes

Aus den obigen Ergebnissen folgt: Sind die Punktladungen  $q_1, \dots, q_n$ , die Raumladungen  $\rho(\vec{y})$  und die Flächenladungen  $\omega(\vec{y})$  gegeben, so hat man am Orte  $\vec{x}$  die Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\text{grad}\varphi(\vec{x}), \\ \varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|} + \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} + \int_F \|d\vec{f}\|(\vec{y}) \frac{\omega(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) . \end{aligned}$$

Bringt man nun eine Punktladung  $q$  an den Punkt  $\vec{x}$ , so wirkt auf sie die Kraft  $\vec{K}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$ .

Es sei nun  $C^\uparrow : \vec{x}(\tau), \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ , ein Weg im  $R^3$  von  $\vec{x}(1) \equiv \vec{x}(\tau_1)$  nach  $\vec{x}(2) \equiv \vec{x}(\tau_2)$ .

**Mechanik:** Wirkt auf einen Massenpunkt die Kraft  $\vec{K}$ , so leistet die Kraft längs des Weges  $C^\uparrow$  am Massenpunkt die Arbeit

$$\hat{A}_{12} = \int_{C^\uparrow} \vec{K}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{K}[\vec{x}(\tau)] \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau .$$

Der Wert von  $\hat{A}_{12}$  hängt i.a. vom Wege  $C^\uparrow$  ab, allerdings **nicht** in dem wesentlichen Falle, daß  $\vec{K} = -\text{grad}V(\vec{x})$ , da dann

$$\vec{K} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} = -\sum_{i=1}^3 \partial_i V \frac{dx_i}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau} V[\vec{x}(\tau)]$$

und

$$\hat{A}_{12} = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} V[\vec{x}(\tau)] = -[V(\vec{x}(2)) - V(\vec{x}(1))].$$

In unserem Falle ist  $V(\vec{x}) = q\varphi(\vec{x})$ , d.h. auf dem Wege von  $\vec{x}(1)$  nach  $\vec{x}(2)$  wird, **unabhängig vom Wege**  $C_{1 \rightarrow 2}^\uparrow$ , an der Punktladung  $q$  die Arbeit

$$\begin{aligned}\hat{A}_{12} &= \int_{C^\uparrow} q\vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\text{grad}\varphi(\vec{x}(\tau))] \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau \\ &= -q[\varphi(\vec{x}(2)) - \varphi(\vec{x}(1))] = qU_{12}, \\ U_{12} &\equiv \varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi_i \equiv \varphi(\vec{x}(i)), \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

geleistet!

$U_{12}$ : Potentialdifferenz zwischen den Punkten  $\vec{x}(1)$  und  $\vec{x}(2) \equiv$  **elektrische Spannung zwischen  $\vec{x}(1)$  und  $\vec{x}(2)$ !** Die Spannung  $U_{12}$  wird in "Volt" gemessen.

Bemerkung: Das Potential  $\varphi(\vec{x})$  selbst hat **keine** unmittelbare physikalische Bedeutung, wohl aber die Feldstärke  $\vec{E}(\vec{x})$ ; da  $\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}\varphi(\vec{x})$ , so ist  $\varphi(\vec{x})$  für ein gegebenes  $\vec{E}$  bis auf eine Konstante bestimmt (aus  $\text{grad}c(\vec{x}) = 0$  folgt  $c = \text{const.}$ )! Die **Spannung**  $U_{12}$  hat dagegen eine eindeutige physikalische Bedeutung, da sie die **Differenz** zwischen Potentialwerten beschreibt!

**Beispiele:**

1. Zwischen den beiden Ebenen von S. 20 werde die Ladung  $q$  von der 1. zur 2. Platte gebracht. Es gilt  $\vec{E} = (0, 0, E_3 = \omega/\varepsilon_0)$  zwischen den Ebenen, also  $\varphi(\vec{x}) = -E_3x_3 + \text{const.}$ , d.h.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = E_3d = \frac{\omega}{\varepsilon_0}d,$$

da  $\varphi_1 = \text{const.}$ ,  $\varphi_2 = -E_3d + \text{const.}$ ,  $d$ : Abstand der Ebenen.

**Plattenkondensator:**

Die unendlich großen Ebenen lassen sich in der Praxis gut durch 2 endliche Flächen ("Platten") vom jeweiligen Flächeninhalt  $F$  approximieren, solange die Ausdehnung der Flächen groß gegenüber dem Abstand  $d$  ist. Die Gesamtladung  $Q$  ist dann  $Q = \omega F$  und  $U_{12} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q(d/F)$ . Der Quotient

$$C \equiv Q/U_{12} = \varepsilon_0 F/d$$

hängt nur von der Geometrie der Anordnung ab und heißt "Kapazität" (gemessen in A s/V = "Farad" = F) des "Plattenkondensators".

2. Bei dem Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|}$$

einer Punktladung  $q_1$  am Orte  $\vec{x}_1$  hat man die additive Konstante  $c$  so gewählt, daß  $\varphi(\|\vec{x}\| \rightarrow \infty) = 0$ . Bringt man nun die Ladung  $q$  **aus dem Unendlichen** ( $\vec{x}(1) \equiv \infty$ ) an den Punkt  $\vec{x}(= \vec{x}(2))$ , so wird dabei **vom** Feld  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  die Arbeit

$$\hat{A}_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|}$$

geleistet.

Die von der Punktladung  $q$  gegen das Feld geleistete Arbeit ist dann

$$A_{12} = -\hat{A}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|}.$$

3. In vielen technisch wichtigen Fällen hat man

$$\varphi(\vec{x}(1)) = \varphi(\text{Erdoberfläche})$$

und man nennt den Punkt  $\vec{x}(1)$  dann (elektrisch) "geerdet".

### 3.2.1 Die "Wirbel" eines Vektorfeldes und Stokesscher Integralsatz

Es sei  $C^\uparrow$  ein **geschlossener** Weg, der sich aus endlich vielen "glatten" (d.h.  $d\vec{x}/d\tau$  ist stetig) Kurvenstücken  $C_i^\uparrow$  zusammensetzt, die sich nicht schneiden. Anfangs- und Endpunkt des Weges fallen zusammen.

Schreibweise bei Wegintegralen, falls der Weg geschlossen ist:

$$\int_{C^\uparrow} \dots d\vec{x} \equiv \oint \dots d\vec{x}.$$

Da  $\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}\varphi$ , so folgt nach S. 22 ( $\vec{x}(1) = \vec{x}(2)$ )

$$\oint \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \text{ für alle stückweise glatten geschlossenen Wege!}$$

Die "lokale" Formulierung dieses Sachverhaltes sieht so aus:

Sei  $\vec{A}(\vec{x})$  ein einmal stetig differenzierbares Vektorfeld, dann heißt

$$Z_{C^\uparrow}(\vec{A}) \equiv \int_{C^\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{x} \equiv \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$$

die "**Zirkulation**" von  $\vec{A}$  längs des geschlossenen Weges  $C^\uparrow$ .

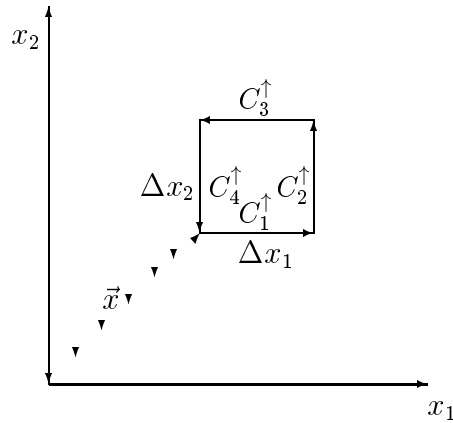
Man ziehe nun  $C^\uparrow$  auf einen Punkt  $\vec{x}$  zusammen, und zwar folgendermaßen: durch  $\vec{x}$  und  $C^\uparrow$  lege man ein glattes Flächenstück  $F^\uparrow$ , so daß  $\vec{x} \in F^\uparrow$  und  $\partial F^\uparrow = C^\uparrow$ . Die Flächennormale in  $\vec{x}$  sei  $\vec{n}(\vec{x})$ . Für kleines  $F^\uparrow = \Delta\vec{f}$  gilt annähernd:  $\Delta\vec{f} \approx \|\Delta\vec{f}\| \vec{n}(\vec{x})$ . Den Limes

$$\lim_{\|\Delta\vec{f}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta\vec{f}\|} \int_{C^\uparrow = \partial(\Delta\vec{f})} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad |\vec{n}(\vec{x}) \text{ fest}|$$

kann man als Projektion  $(\text{rot}\vec{A}) \cdot \vec{n}$  eines Vektors  $(\text{rot}\vec{A})(\vec{x})$  auf die Richtung  $\vec{n}(\vec{x})$  interpretieren ("Zirkulation" von  $\vec{A}$  um  $\vec{n}$  am Orte  $\vec{x}$  !)

$(\text{rot}\vec{A})(\vec{x})$  selbst bekommt man, indem man seine Komponenten  $(\text{rot}\vec{A})_i$  in **drei** voneinander unabhängige Richtungen  $\vec{n}_i$  berechnet!

Beispiel: Kartesische Koordinaten:



Es sei  $\Delta \vec{f} = \Delta x_1 \Delta x_2 \vec{n}_3$ ,  $\vec{n}_3 = (0, 0, 1)$ . Längs des Weges  $C_1^\uparrow$  gilt

$$A_1 = A_1(\vec{x}) + \partial_1 A_1(\vec{x}) \Delta x_1 + \dots$$

und längs  $C_3^\uparrow$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\vec{x} + \Delta x_2) + \partial_1 A_1(\vec{x} + \Delta x_2) \Delta x_1 + \dots \\ &= A_1(\vec{x}) + \partial_2 A_1(\vec{x}) \Delta x_2 + \partial_1 A_1(\vec{x}) \Delta x_1 + \dots, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int_{C_1^\uparrow + C_3^\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{x} &= \int_{C_1^\uparrow} A_1 dx_1 + \int_{C_3^\uparrow} A_1 dx_1 \\ &\approx (-\partial_2 A_1) \Delta x_1 \Delta x_2 + \text{höhere Terme.} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich :

$$\int_{C_2^\uparrow + C_4^\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{x} \approx (\partial_1 A_2) \Delta x_1 \Delta x_2 + \text{höhere Terme,}$$

also

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_3 &= (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{n}_3 = \lim_{\|\Delta \vec{f}\| \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \int_{\partial \Delta \vec{f}} \vec{A} \cdot d\vec{x} \\ &= (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\vec{x}). \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für  $\vec{n}_i = \vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}(\vec{x}) &= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)(\vec{x}) \vec{e}_1 \\ &\quad + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)(\vec{x}) \vec{e}_2 + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\vec{x}) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Falls  $\vec{A} = \text{grad } \varphi$ , so folgt aus  $\partial_i \partial_k \varphi = \partial_k \partial_i \varphi$  sofort  $\text{rot } \vec{A} = 0$ .

Die Umkehrung der obigen Überlegungen (d.h. falls man  $F^\uparrow$  aus kleinen  $\Delta f_i$  "zusammenstückelt" und dann zum Grenzwert des Integrals übergeht, ergibt den **Stokesschen Satz**

Ist  $\vec{A}(\vec{x})$  ein 1-mal stetig differenzierbares Vektorfeld und  $F^\uparrow$  ein glattes Flächenstück mit stückweise glattem Rand  $C^\uparrow = \partial F^\uparrow$ , dann gilt

$$\int_{F^\uparrow} (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial F^\uparrow} \vec{A} \cdot d\vec{x}.$$

Anwendung auf die Elektrostatik: Da  $\vec{E} = \text{grad } \varphi$ , so folgt

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

d. h. das elektrostatische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  ist "**wirbelfrei**".

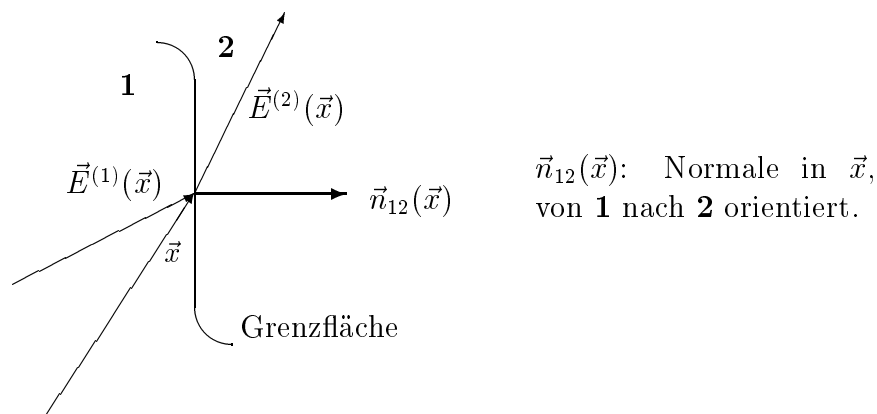
Umgekehrt läßt sich mathematisch zeigen, daß aus der Gültigkeit von  $\text{rot } \vec{E} = 0$  in einem **sternförmigen**, d. h. auf einen Punkt zusammenziehbaren Gebiet  $G$  die Darstellung  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  folgt!

Als Grundgleichungen der Elektrostatik erhalten wir somit

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}), \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{x}) = 0, \quad \partial_t \rho(t, \vec{x}) = 0.$$

### 3.2.2 Randbedingungen für das elektrostatische Feld

Die obigen Grundgleichungen sind zu ergänzen durch die Randbedingungen für  $\vec{E}$  an den Grenzflächen

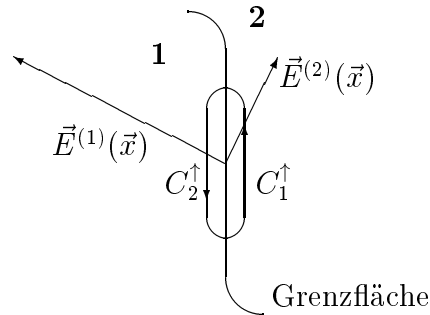


**Normalkomponente:** Nach Kap. 3.1.2 ergibt sich für die Normalkomponente des elektrostatischen Feldes

$$\varepsilon_0 (\vec{E}^{(2)}(\vec{x}) - \vec{E}^{(1)}(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{12}(\vec{x}) = \omega(\vec{x}),$$

d.h. die Normalkomponente von  $\vec{E}$  macht einen Sprung, falls Flächenladungen vorliegen.

**Tangentialkomponente:**



Wegen

$$\int_{C_1^\uparrow + C_2^\downarrow} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$$

gilt

$$\int_{C_1^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_{C_2^\downarrow} \vec{E} \cdot d\vec{x}.$$

Da  $d\vec{x}/d\tau$  Tangentialvektor an  $C_i^\uparrow$  im Punkte  $\vec{x} \in C_i^\uparrow$  ist, so folgt

$$\int_{C_1^\uparrow} \|\vec{E}_t\| \|\dot{\vec{x}}\| d\tau = - \int_{C_2^\downarrow} \|\vec{E}_t\| \|\dot{\vec{x}}\| d\tau,$$

wobei  $\|\vec{E}_t\|$  die Projektion von  $\vec{E}$  auf  $\dot{\vec{x}}$ . Schmiegen sich  $C_1^\uparrow$  und  $C_2^\downarrow$  immer mehr an die Grenzfläche an, so folgt  $C_1^\uparrow \rightarrow C_2^\downarrow$  und  $l(C_1^\uparrow) \rightarrow l(C_2^\downarrow)$ , wobei  $l(C_i^\uparrow) = \int_{C_i^\uparrow} \|\dot{\vec{x}}\| d\tau$  die Länge von  $C_i^\uparrow$ . Da  $\int_{C^\uparrow} = - \int_{C^\downarrow}$ , so folgt aus dem Mittelwertsatz:

$$E_t^{(1)} l(C_1^\uparrow) = E_t^{(2)} l(C_2^\downarrow), \quad E_t^{(i)} = \|\vec{E}_t^{(i)}\|,$$

Im Limes  $C_1^\uparrow \rightarrow C_2^\downarrow$  gilt  $l(C_1^\uparrow) \rightarrow l(C_2^\downarrow)$ , und damit  $E_t^{(1)} \rightarrow E_t^{(2)}$ , also

$$\boxed{E_t^{(1)}(\vec{x}) = E_t^{(2)}(\vec{x})}$$

d.h. die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  an der Grenzfläche ist stetig!

# Kapitel 4

## Elektrostatische Feldenergien und Flächenkräfte

### 4.1 Feldenergie

Hat man eine Ladung  $q_1$  am Orte  $\vec{x}_1$ , und bringt man eine Ladung  $q_2$  aus dem Unendlichen nach  $\vec{x}_2$ , so leistet  $q_2$  gegen das Feld die Arbeit (S. 23)

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|}.$$

Bringt man zusätzlich die Ladungen  $q_3, \dots, q_n$  aus dem Unendlichen an die Punkte  $\vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n$ , so wird insgesamt die Arbeit

$$\begin{aligned} A(1, \dots, n) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < k}^n \frac{q_i q_k}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_k\|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n \frac{q_i q_k}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_k\|} \end{aligned}$$

geleistet. Für sehr große  $n$  kann man wieder zu kontinuierlichen Ladungsdichten übergehen und erhält dann:

$$A(1, \dots, n) \rightarrow W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.$$

$W$  ist die gesamte "Potentielle" Energie, die in der vorgegebenen elektrostatischen Ladungsverteilung enthalten ist. Da

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = \varphi(\vec{x})$$

und

$$\rho(\vec{x}) = -\epsilon_0 \Delta \varphi(\vec{x}), \quad \Delta : \text{Laplace-Operator},$$

so kann man  $W$  auch folgendermaßen schreiben:

$$W = \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3x \rho(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} d^3x \varphi(\vec{x}) \Delta \varphi(\vec{x}).$$

Das letzte Integral läßt sich mit Hilfe der 1. Greenschen Formel (s.S. 16)

$$\int_{\partial G} (f_1 \cdot \text{grad} f_2) \cdot d\vec{f} = \int_G ((\text{grad} f_1 \cdot \text{grad} f_2) + f_1 \Delta f_2) d^3x,$$

$f_1, f_2$  : Funktionen, mit der Setzung  $f_1 = f_2 = \varphi$  weiter umformen. Da  $\text{grad} \varphi = -\vec{E}$  im Unendlichen wie  $\|\vec{x}\|^{-2}$  und  $\varphi$  selbst wie  $\|\vec{x}\|^{-1}$  verschwinden sollen, so verschwindet das Oberflächenintegral für  $G = R^3$  und man erhält:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3} d^3x (\vec{E}(\vec{x}))^2.$$

**Interpretation** (Maxwell):

$$w(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}) : \text{elektrostatische Energiedichte im Punkte } \vec{x}!$$

D.h. überall dort, wo ein elektrisches Feld vorhanden ist, wird die Energie der Dichte  $w(\vec{x})$  gespeichert, unabhängig davon, ob dort Ladungen sind oder nicht !

**Beispiel:** im Innern eines Kondensators (Plattengröße:  $F$ ; Abstand:  $d$ ) mit konstantem Feld  $\vec{E}$  und  $E d = U_{12}$ , wobei  $E \equiv \|\vec{E}\| = \omega/\varepsilon_0$ ,  $Q = \omega F$  wird demnach die Energie  $W_C$  gespeichert:

$$\begin{aligned} W_C = w F d &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 F d = \frac{1}{2} \omega F U_{12} \\ &= \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2, \quad U \equiv U_{12}, \quad Q = \omega F \end{aligned}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

## 4.2 Flächenkräfte

Befindet sich am Orte  $\vec{x}$  das Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  und die Ladungsdichte  $\rho(\vec{x})$ , so kann man, in Verallgemeinerung zu den Kräften auf Punktladungen, die **Kraftdichte**

$$\vec{k}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x})$$

definieren. Sie hat die Bedeutung, daß

$$\vec{K}(G) = \int_G d^3x \vec{k}(\vec{x}) = \int_G d^3x \rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x})$$

die Kraft  $\vec{K}(G)$  auf alle Ladungen in einem Gebiet  $G$  ergibt. Da  $\rho(\vec{x}) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x})$ , so hat man

$$\vec{k}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{E}.$$

Die Dichte  $\vec{k}(\vec{x})$  hat die wichtige Eigenschaft, daß

$$k_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j T_{ij}(\vec{x}), \quad T_{ij}(\vec{x}) = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2)(\vec{x}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \partial_j T_{ij} &= \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 (E_j \partial_j E_i + E_i \partial_j E_j - \delta_{ij} \sum_{m=1}^3 E_m \partial_j E_m) \\ &= \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 (E_i \partial_j E_j + E_j \underbrace{(\partial_j E_i - \partial_i E_j)}_{=0, \text{ da } \operatorname{rot} \vec{E} = 0}) \\ &= \varepsilon_0 E_i \operatorname{div} \vec{E}. \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Folgerungen:

Mit  $\vec{T}_i = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ist  $k_i(\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{T}_i(\vec{x})$ , und die Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt für die Kraftkomponenten  $K_i$ :

$$K_i(G) = \int_G \operatorname{div} \vec{T}_i d^3x = \int_{\partial G} \vec{T}_i d\vec{f}; \quad i = 1, 2, 3.$$

d.h. die **Kraft auf die Ladungen in  $G$**  läßt sich als **Integral über die Oberfläche  $\partial G$  von  $G$  darstellen (Maxwell) !!**

Einige Eigenschaften der Matrix  $T = (T_{ij})$ :

$$\begin{aligned} T_{ij}(\vec{x}) &= \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2)(\vec{x}), \\ T_{ij} &= T_{ji} \quad : \quad T \text{ ist symmetrisch,} \\ \operatorname{Spur}(T) &= \sum_{i=1}^3 T_{ii} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 = -w(\vec{x}). \end{aligned}$$

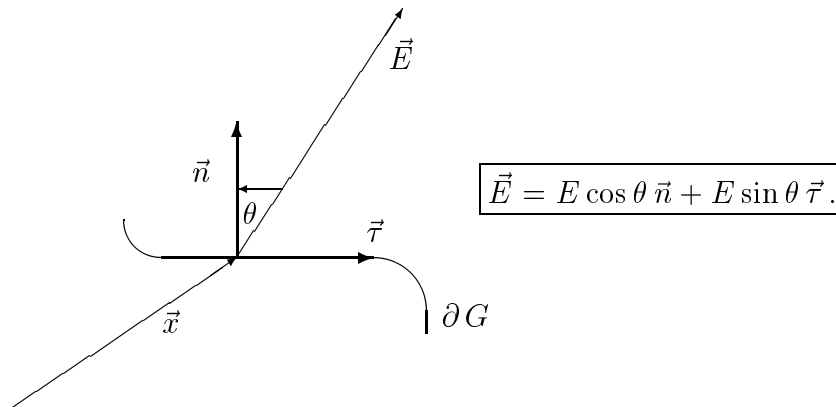
Ist  $\vec{n}(\vec{x}) = (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) / \|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|$  Normalenvektor von  $\partial G$  im Punkte  $\vec{x}$  und setzt man

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{x}) &= T \cdot \vec{n}(\vec{x}) \\ &= \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E})^2 \vec{n}, \\ \text{so wird } \vec{K}(G) &= \int_{\partial G} (T \cdot \vec{n}) \|d\vec{f}\|. \end{aligned}$$

$\vec{S}(\vec{x}) = T \cdot \vec{n}(\vec{x})$  wird als "Flächenkraftdichte-Vektor" bezeichnet.

Veranschaulichung von  $\vec{S}(\vec{x})$  :

$\vec{n}$  und  $\vec{E}$  spannen eine Ebene auf, in der ein Tangentialvektor  $\vec{\tau}$ ,  $\|\vec{\tau}\| = 1$ , an  $\partial G$  liegt:



Für  $\vec{S}$  ergibt sich

$$\vec{S} = \varepsilon_0 [E(\cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{\tau}) \cdot E \cos \theta - \frac{1}{2} E^2 \vec{n}],$$

oder

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (\cos 2\theta \vec{n} + \sin 2\theta \vec{\tau}).$$

Beispiele:  $\theta = 0$  :  $\vec{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{n}$  : "Zug" nach außen

$\theta = 45$  :  $\vec{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{\tau}$

$\theta = 90$  :  $\vec{S} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{n}$  : "Druck" nach innen.

**Anwendung:** Eine Kugel vom Radius  $a$  und konstanter Ladungsdichte  $\rho$  werde in 2 Hälften geschnitten. **Mit welcher Kraft stoßen sich die beiden Halbkugeln ab?** Die Schnittebene sei die Ebene  $x_3 = 0$ , und der Mittelpunkt der Kugel liege im Ursprung. Nach S. 19 herrscht im Innern der Kugel das Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{r}{a^3} \vec{e}_r,$$

$Q$ : Gesamtladung der Kugel.

Ist  $F$  die **Schnittfläche** ( $F = \pi a^2$ ), so bekommt man für die Kraft auf die Halbkugel

$$\vec{K}(\frac{1}{2}K(a)) = \int_F \vec{S} \|d\vec{f}\| + \int_{\frac{1}{2}\partial K(a)} \vec{S} \|d\vec{f}\|.$$

Im **Schlitz** ist  $\vec{E}$  **tangential zur Schnittfläche**, d. h.

$$\vec{S} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \vec{n}, \quad \vec{n} = (0, 0, -1) = -\vec{e}_3.$$

Als Beitrag vom Schnitt erhält man daher:

$$K_1^{(F)} = 0, \quad K_2^{(F)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
K_3^{(F)} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} E^2 d\varphi r dr \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)^2 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{16a^2},
\end{aligned}$$

also:

$$\boxed{\vec{K}^{(F)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{16a^2} \vec{e}_3.}$$

Als Beitrag von der halben Kugeloberfläche ergibt sich, da  $\vec{E}$  **parallel zu**  $\vec{n} = \vec{e}_r$  ist,  $\vec{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(a)\vec{e}_r$ :

$$\vec{K}^{(\frac{1}{2}\partial K)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{a^2}\right)^2 \int_{\frac{1}{2}\partial K(a)} \vec{e}_r \|d\vec{f}\|$$

Mit  $\vec{e}_r = \cos\varphi \sin\vartheta \vec{e}_1 + \sin\varphi \sin\vartheta \vec{e}_2 + \cos\varphi \vec{e}_3$   
und  $\|d\vec{f}\| = a^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta$  ist:

$$\vec{K}^{(\frac{1}{2}\partial K)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8\pi a^2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \vec{e}_r.$$

Da

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
K_{1,2}^{(\frac{1}{2}\partial K)} &= 0, \\
K_3^{(\frac{1}{2}\partial K)} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8\pi a^2} 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta}_{1/2};
\end{aligned}$$

also:

$$\boxed{\vec{K}^{(\frac{1}{2}\partial K)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8a^2} \vec{e}_3 = 2\vec{K}^{(F)}.}$$

Somit ergibt sich schließlich für die abstoßende Kraft

$$\boxed{\vec{K}(\frac{1}{2}K(a)) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{16a^2} \vec{e}_3.}$$

### 4.3 Zusammenstellung der wichtigsten Feldgleichungen aus der Elektrostatik

$\rho(\vec{x}, t)$  : Ladungsdichte;  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  : Stromdichte

Ladungserhaltung (gilt ganz allgemein !):

$$\partial_t \rho(\vec{x}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad .$$

Kraft auf eine Punktladung  $q$  am Orte  $\vec{x}$  :

$$\vec{K}(q, \vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x}), \quad q \text{ fest,}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) : \text{elektrische Feldstärke .}$$

Elektrostatik :  $\vec{j}(\vec{x}, t) = 0$ ; folglich  $\partial_t \rho(\vec{x}, t) = 0$  .

Zusammenhang zwischen elektrostatischem Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  und Ladungsdichte  $\rho(\vec{x})$ :

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

$$\implies \vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{x}) \quad , \quad \Delta \varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad .$$

Verhalten von  $\vec{E}$  an Grenzflächen mit Flächenladungsdichte  $\omega$  :

$$\varepsilon_0 (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \vec{n}_{12} = \omega(\vec{x}), \quad \vec{E}_t^{(2)}(\vec{x}) = \vec{E}_t^{(1)}(\vec{x})$$

$$\text{Energiedichte : } w(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}) \quad .$$

$$\text{Kraftdichte : } \vec{k}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) \quad ,$$

$$k_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j T_{ij}(\vec{x}), \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

$$T_{ij}(\vec{x}) = \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2) \quad .$$

#### Anmerkungen über den Zusammenhang mit Punktladungen:

1. Elektrostatische "Selbstenergie" einer Punktladung  $q$ : sie erzeugt am Orte  $\vec{x}$  das Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

und damit die Energiedichte

$$w(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0 q^2}{2(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{1}{\|\vec{x}\|^4},$$

d. h. die elektrostatische "Selbstenergie"  $W_0$  ist

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x w(\vec{x}) = \int_0^\infty r^2 dr d\Omega \frac{q^2}{2(4\pi\epsilon_0)4\pi r^4} \frac{1}{r} \\ &= \frac{q^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty!, \end{aligned}$$

da das Integral an der unteren Grenze divergiert (**Punktladung!!**). Das Ergebnis ist physikalisch unsinnig und zeigt eine der Grenzen der klassischen Elektrodynamik!

Bei einer ladungsgefüllten Kugel vom Radius  $a$  und Gesamtladung  $q$  erhält man analog für die Energie im Gebiet  $r \geq a > 0$ :

$$W_a = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Beim Elektron hat man einen "Radius"  $r_e$  dadurch zu definieren versucht, daß man seine elektrostatische Energie mit der Ruheenergie gleichgesetzt hat:

$$\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} = m_e c^2.$$

Einsetzen der bekannten Zahlen für  $e_0$  und  $m_e$  ergibt  $r_e \approx 2,8 \times 10^{-11} m$ . Jedoch ist ein solches *klassisches* Bild vom Elektron aus quantentheoretischen Gründen nicht haltbar.

2. Einige der früheren Gleichungen für Punktladungen  $q_1, \dots, q_n$ , kann man aus den obigen "Feldgleichungen" mittels der Formel

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

gewinnen:

Befindet sich eine Punktladung  $q$  in  $\vec{x}$  in dem stetigen äußeren Feld  $\vec{E}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \vec{K}(q, \vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{k}(\vec{y}) d^3y = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{y}) \vec{E}(\vec{y}) d^3y \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} q \delta(\vec{y} - \vec{x}) \underbrace{\vec{E}(\vec{y})}_{\text{"Testfunktion"}} d^3y \\ &= q(\delta_{\vec{x}}(E_1), \delta_{\vec{x}}(E_2), \delta_{\vec{x}}(E_3)) \\ &= q \vec{E}(\vec{x}). \end{aligned}$$

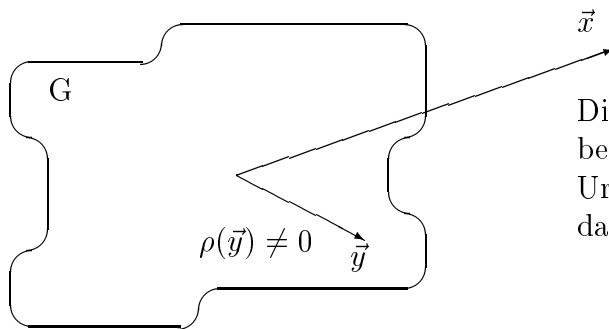
Ferner gilt

$$\begin{aligned} A(1, \dots, n) &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int d^3x q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \varphi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(\vec{x}_i) , \\ \varphi(\vec{x}_i) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_k\|} . \end{aligned}$$

# Kapitel 5

## Elektrostatische Multipole



Die Ladungsdichte  $\rho$  sei in einem beschränkten Gebiet  $G$  um den Ursprung von Null verschieden, dann hat man außerhalb von  $G$ :

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.$$

Für Abstände  $\|\vec{x}\|$ , die groß gegenüber dem Durchmesser von  $G$  sind, kann man

$$\begin{aligned} g(\vec{y}) &= \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = \frac{1}{((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(r^2 + \eta^2 - 2\eta r \cos \vartheta)^{1/2}}, \end{aligned}$$

wobei  $r = \|\vec{x}\|$ ,  $\eta = \|\vec{y}\|$ ,  $\vartheta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ , in einer Taylor-Reihe um  $\vec{y} = 0$  entwickeln:

### 5.1 Multipole in kartesischen Koordinaten

Die Entwicklung von  $g(\vec{y})$  in kartesischen Koordinaten ergibt

$$g(\vec{y}) = g(\vec{y} = 0) + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial g}{\partial y_i} \Big|_{\vec{y}=0} \right) y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k} \Big|_{\vec{y}=0} \right) y_i y_k + \dots,$$

$$g(\vec{y} = 0) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}, \quad \frac{\partial g}{\partial y_i} \Big|_{\vec{y}=0} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k}\right)|_{\vec{y}=0} = 3 \frac{x_i x_k}{\|\vec{x}\|^5} - \frac{\delta_{ik}}{\|\vec{x}\|^3}.$$

Einsetzen ergibt

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi^{(0)}(\vec{x}) + \varphi^{(1)}(\vec{x}) + \varphi^{(2)}(\vec{x}) + \dots$$

mit:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \int_G d^3y \rho(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(G)}{\|\vec{x}\|}, \\ Q &= \int_G d^3y \rho(\vec{y}) : \text{Gesamtladung in } G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, \quad \vec{p} = \int_G d^3y \vec{y} \rho(\vec{y}), \\ \vec{p} &: \text{„Dipolmoment“ der Ladungsverteilung.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 3Q_{ik} \frac{x_i x_k}{\|\vec{x}\|^5}, \\ Q_{ik} &= \frac{1}{3} \int_G d^3y \rho(\vec{y}) (3y_i y_k - \vec{y}^2 \delta_{ik}), \\ &\quad i, k = 1, 2, 3. \\ (Q_{ik}) &: \text{„Quadrupolmoment“ der Ladungsverteilung.} \end{aligned}$$

Bei der Transformation  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$ ,  $\rho(\vec{x}) \rightarrow \rho'(\vec{x}') = \rho(\vec{x})$  geht das obige  $\rho(\vec{x})$  in  $\rho'(\vec{x}) = \rho(\vec{x} - \vec{a})$  über und daher

$$Q \rightarrow \int d^3y \rho(\vec{y} - \vec{a}) = \int d^3y \rho(\vec{y}) = Q,$$

$$\vec{p} \rightarrow \int d^3y \vec{y} \rho(\vec{y} - \vec{a}) = \vec{p} + Q\vec{a},$$

d.h. das Dipolmoment  $\vec{p}$  ist nur dann eine vom Koordinatensystem unabhängige Größe, falls  $Q = 0$ !

Analog gilt

$$Q_{ik} \rightarrow Q_{ik} + (p_i a_k + p_k a_i) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \vec{a} \cdot \vec{p} + \frac{1}{3} Q (3a_i a_k - \delta_{ik} \vec{a}^2).$$

### 5.1.1 Diskussion

#### Nullte Näherung

$\varphi^{(0)}(\vec{x})$ : Coulomb-Potential, d. h. in großen Abständen verhält sich eine **beliebige** räumlich beschränkte Ladungsverteilung in nullter Näherung wie eine Punktladung.

#### 1. Näherung: Dipolpotential

$$\varphi^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3},$$

”Dipol”-Näherung. Der Name rührt daher, daß man im Falle von Punktladungen  $q_i$  mindestens 2 braucht, um einen ”Dipol”  $\vec{p}$  haben zu können:  $\vec{p} = q_1\vec{x}_1 + q_2\vec{x}_2 = q_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$  für  $Q = 0$ . Zum Dipol-Potential  $\varphi^{(1)}$  gehört das Dipol-Feld

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}),$$

das für große Abstände um eine Potenz in  $r^{-1}$  stärker abfällt als das Coulombfeld  $\vec{E}^{(0)}$ .

Die **Energie** eines Dipols in einem **äußeren** (externen) Feld  $\vec{E}_{ex} = -\text{grad}\varphi_{ex}$  erhält man so: Die Gesamtenergie der dem äußeren Felde ausgesetzten Ladungsdichte  $\rho(\vec{y})$  ist

$$W_{ex} = \int d^3y \rho(\vec{y}) \varphi_{ex}(\vec{y}) .$$

Variiert  $\varphi_{ex}(\vec{y})$  nicht sehr stark in dem Gebiet, in dem  $\rho(\vec{y}) \neq 0$ , so kann man  $\varphi_{ex}(\vec{y})$  in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$\varphi_{ex}(\vec{y}) = \varphi_{ex}(0) + \vec{y} \cdot \text{grad}\varphi_{ex}|_{\vec{y}=0} + \dots$$

Mit  $\vec{E}_{ex}(0) = -\text{grad}\varphi_{ex}|_{\vec{y}=0}$  erhält man

$$\begin{aligned} W_{ex} &= Q\varphi_{ex}(0) - \int d^3y \rho(\vec{y}) \vec{y} \cdot \vec{E}_{ex}(0) + \dots \\ &= Q\varphi_{ex}(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}_{ex}(0) + \dots, \end{aligned}$$

d. h.

$$W_{ex}^{(1)} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ex}(0)$$

ist die Energie eines Dipols  $\vec{p}$  in einem äußeren Feld  $\vec{E}_{ex}$ , wobei  $\vec{p}$  in der Nähe von  $\vec{x} = 0$  lokalisiert ist.

Analog bekommt man für die **Kraft**

$$\begin{aligned} \vec{K}_{ex} &= \int d^3y \rho(\vec{y}) \vec{E}_{ex}(\vec{y}) \\ &= \int d^3y \rho(\vec{y}) (\vec{E}_{ex}(0) + \sum_{i=1}^3 y_i \partial_i \vec{E}_{ex}(0) + \dots), \end{aligned}$$

d. h.

$$\vec{K}_{ex}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 p_i \partial_i \vec{E}_{ex}(0).$$

In einem räumlich konstanten Feld ( $\partial_i \vec{E} = 0$ ) erfahren **Dipole** demnach **keine** Kräfte.

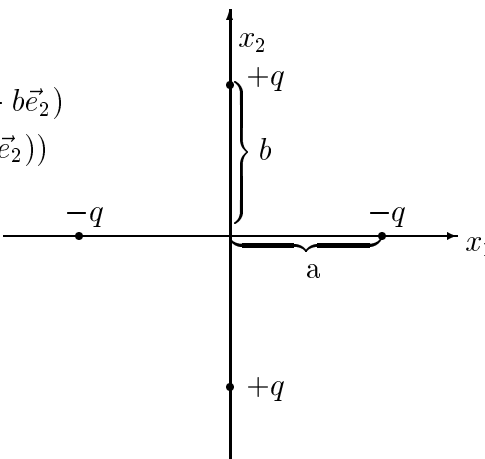
Als Drehmoment eines Dipoles im Feld  $\vec{E}_{ex}$  erhält man entsprechend

$$\vec{N}_{ex}^{(1)} = \int d^3y \rho(y) \vec{y} \times (\vec{E}_{ex}(0) + \dots) = \vec{p} \times \vec{E}_{ex}(0).$$

**Quadrupolmoment (matrix)** ( $Q_{ik}$ ),  $i, k = 1, 2, 3$ .

Der Name rührt daher, daß es von 4 Punktladungen erzeugt werden kann.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{y}) &= q(-\delta(\vec{y} - a\vec{e}_1) + \delta(\vec{y} - b\vec{e}_2) \\ &\quad -\delta(\vec{y} + a\vec{e}_1) + \delta(\vec{y} + b\vec{e}_2)) \\ Q_{11} &= -\frac{2}{3}q(2a^2 + b^2) \\ Q_{22} &= \frac{2}{3}q(a^2 + 2b^2) \\ Q_{33} &= \frac{2}{3}q(a^2 - b^2) \\ Q_{ij} &= 0 \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$


$$\text{Allgemein gilt: } \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0, \quad Q_{ij} = Q_{ji}.$$

( $Q_{ij}$ ) ist symmetrische Matrix mit verschwindender Spur, d. h. besitzt nur 2 voneinander unabhängige reelle Eigenwerte. Energie und Kräfte sind analog wie beim Dipol (**2. Glied** der Taylor-Entwicklung!): Z.B. gilt

$$W_{ex}^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \partial_i E_{exj}(0).$$

## 5.2 Multipole in Polarkoordinaten

Ist  $\eta < r$ , so kann man  $g(\vec{y})$  auch nach Potenzen von  $\eta/r$  entwickeln:

$$g(\vec{y}) = \frac{1}{r [1 - 2(\eta/r)z + (\eta^2/r^2)]^{1/2}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (\eta/r)^l P_l(z), \quad z \equiv \cos \vartheta.$$

Die Funktionen  $P_l(z)$  sind die **Legendre-Polynome** vom Grade  $l$ . Die niedrigsten Polynome haben die Form

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots$$

Einsetzen dieser Entwicklung in den Ausdruck für  $\varphi(\vec{x})$  ergibt

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{\infty} d\eta P_l(z) \eta^{l+2} \rho(\vec{y}).$$

Der Term mit  $l = 0$  ergibt  $\varphi^{(0)}(\vec{x})$ , der mit  $l = 1$  das Dipolpotential, der mit  $l = 2$  das Quadrupolpotential etc.

# Kapitel 6

## Ideale Leiter in der Elektrostatik

Elektrische Leiter sind dadurch charakterisiert, daß sie frei bewegliche Ladungsträger in größerem Umfange enthalten.

Idealfall: Der elektrische Widerstand verschwindet und der Vorrat an Ladungen beiderlei Vorzeichens ist beliebig groß.

### 6.1 Randbedingungen an Oberflächen

1. *Isolierter Leiter*: das elektrische Feld  $\vec{E}^{in}$  im Innern eines Leiters verschwindet; denn wäre es nicht gleich Null, so würden sich die Ladungen im Innern so lange verteilen, bis das ursprünglich vorhandene Feld kompensiert ist! D.h.

$$\vec{E}^{in} = 0 \text{ bzw. } \varphi_{in} = const. \text{ im Innern von Leitern.}$$

An der Oberfläche eines Leiters können Oberflächenladungen sitzen, die mit-helfen, das Feld im Innern zum Verschwinden zu bringen! Ist  $\vec{n}(\vec{x})$  Normale an die Oberfläche im Punkte  $\vec{x}$ , so gilt nach S. 32 für die nach außen weisende Normalkomponente  $\vec{E}^{au}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \vec{E}^{au}(\vec{x}) &= \varepsilon_0 E_n^{au} \vec{n}(\vec{x}) = \omega(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x}), \\ \text{da } \vec{E}_t^{au} &= \vec{E}_t^{in} = 0 ; \\ \vec{E}_t &: \text{Tangentialkomponente.} \end{aligned}$$

Nimmt der Leiter das endliche Gebiet  $G$  ein, so gilt

$$Q(G) = \int_{\partial G} \omega \|d\vec{f}\| = \varepsilon_0 \int_{\partial G} E_n^{au} \|d\vec{f}\| .$$

Außerdem gilt wegen der Stetigkeit des Potentials

$$\varphi(\partial G) = \varphi(intG) = const. ,$$

d.h.  $\partial G$  ist eine "Äquipotentialfläche".

2. Bringt man den obigen Leiter in ein **äußeres Feld**  $\vec{E}_{ex}$ , so wirkt eine Kraft auf die Ladungen im Innern des Leiters, und diese verteilen sich so lange neu, bis das durch die Umverteilung erzeugte Feld das Feld  $\vec{E}_{ex}$  an jedem Punkt in  $G$  gerade kompensiert (Phänomen der **”Influenz”**).  
 Folge: **es gilt weiterhin**  $\vec{E}_t^{au} = 0$  **und**  $\varepsilon_0 \vec{E}^{au}(\vec{x}) = \omega(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x})$  **für das resultierende Gesamtfeld an der Leiteroberfläche.**
3. Verallgemeinerung:  $n$  Leiter nehmen jeweils die Gebiete  $G_i, i = 1, \dots, n$ , ein. Folgende Randbedingungen seien vorgegeben:  
 a) die ersten  $r$  Leiter seien isoliert und ihre Ladung

$$Q_i = \varepsilon_0 \int_{\partial G_i} E_n^{au} \|d\vec{f}\|$$

bekannt.

b) die restlichen  $n - r$  Leiter seien auf einem festem Potential  $\varphi(\vec{x}) = U_i, \vec{x} \in \partial G_i$ , wobei für geerdete Leiter  $U_i = 0$ .

**Zwischen** den Leitern können sich noch feste Raum- und Punktladungen befinden und dort genügt das Potential der Gleichung

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)) \quad \text{für } \vec{x} \in R^3 - \sum_{i=1}^n G_i.$$

**Problem:** Man löse diese partielle Differentialgleichung für  $\varphi(\vec{x})$  unter Beachtung der obigen Randbedingungen!

Ein Nachweis zur **Existenz** von Lösungen überschreitet den Rahmen der Vorlesung. Gibt es jedoch eine Lösung, so ist diese, abgesehen von einer Konstanten, **eindeutig!**

Beweis: Sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zwei Lösungen, so genügt  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  in  $R^3 - \sum G_i$  der Gleichung

$$\Delta\psi = 0.$$

Unter der physikalisch plausiblen Annahme, daß  $\psi \text{grad}\psi$  für sehr große  $\|\vec{x}\|$  mindestens wie  $\|\vec{x}\|^{-3}$  abfällt, folgt ganz analog wie auf S. 28 aus der 1. Greenschen Formel

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\partial G_i} \psi \text{grad}\psi \cdot d\vec{f} = \int_{R^3 - \sum_{i=1}^n G_i} d^3x \|\text{grad}\psi\|^2.$$

Nun gilt :

a) für die ersten  $r$  Leiter ist mit  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2, \text{grad}\psi = \vec{E}_2 - \vec{E}_1,$

$$\int_{\partial G_i} \text{grad}\psi \cdot d\vec{f} = \int_{\partial G_i} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{f} = Q_i - Q_i = 0 \quad \text{und}$$

b) da  $\psi = \text{const.}$  auf  $\partial G_i$ , weil  $\partial G_i$  eine Fläche konstanten Potentials ist, so erhält man

$$\int_{\partial G_i} \psi \text{grad}\psi \cdot d\vec{f} = \psi_i \int_{\partial G_i} \text{grad}\psi \cdot d\vec{f} = 0 \quad i = 1, \dots, r.$$

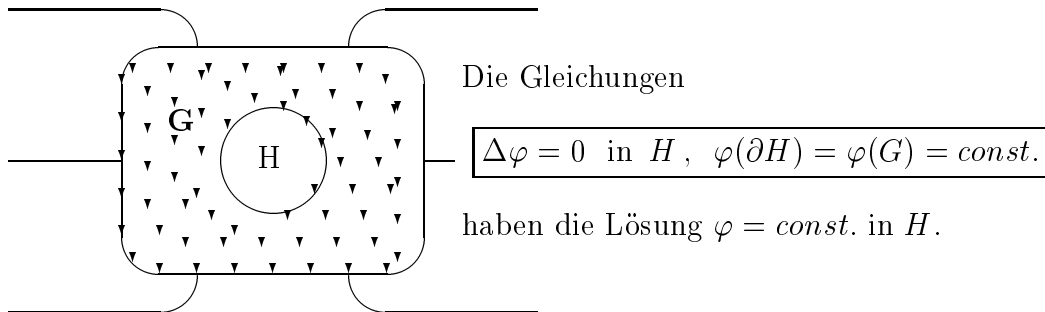
Dieselbe Gleichung gilt für die restlichen  $n - r$  Leiter, weil offenbar  $\psi_i = U_i - U_i = 0$  auf  $\partial G_i$ .

Es folgt, daß

$$\int_{R^3 - \sum_{i=1}^n G_i} d^3x \|\text{grad}\psi\|^2 = 0, \quad \text{d.h. } \psi = \text{const.} \quad \text{q.e.d.}$$

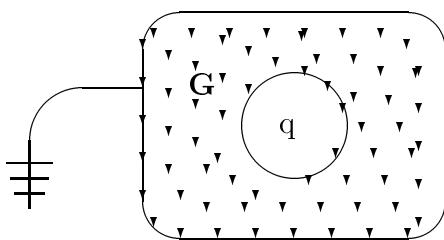
### Beispiele:

1. Ein Leiter  $G$  befinde sich in einem äußeren Feld und enthalte im Innern einen Hohlraum  $H$ .



Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt  $\vec{E} = 0$  in  $H$  (Abschirmung, "Faradayscher Käfig"). Da die Konstante in  $G$  und  $H$  den gleichen Wert hat, sitzen **auf  $\partial H$  keine Flächenladungen**.

2. Der Hohlraum  $H$  von Beispiel 1 sei eine Kugel mit Radius  $a$ , in deren Mittelpunkt sich eine Punktladung  $q$  befindet.



Ferner sei der Leiter  $G$  geerdet:

$$\varphi(G) = 0.$$

Frage: Wie sehen Potential und Feld in  $H$  und auf  $\partial H$  aus ?

$q$  befinde sich im Punkte  $\vec{x} = 0$ ; dann gilt

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 \Delta\varphi(\vec{x}) &= \rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x}) & \text{für } \|\vec{x}\| < a, \\ \varphi(\vec{x}) &= 0 & \text{für } \|\vec{x}\| = a. \end{aligned}$$

Eine **rotationssymmetrische Lösung** ist

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{A}{\|\vec{x}\|} + B; \quad A, B = \text{const.}$$

Da

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = \frac{A}{\|\vec{x}\|^2} \vec{e}_r \quad \text{für } \|\vec{x}\| < a,$$

so muß  $A = q/4\pi\epsilon_0$  sein.  $B$  wird so gewählt, daß  $\varphi(\vec{x}) = 0$  für  $\|\vec{x}\| = a$ :

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{1}{a} \right).}$$

Da

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= 0 \quad \text{für } \|\vec{x}\| > a, \text{ aber} \\ \vec{E}(\|\vec{x}\| = a) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_r \quad \text{auf } \partial H, \end{aligned}$$

macht die Feldstärke einen Sprung auf  $\partial H$ . Und weil die Normale  $\vec{n}$  auf  $\partial H$  durch  $\vec{e}_r(\vec{x}, \|\vec{x}\| = a)$  gegeben ist, so muß sich nach S. 40 auf  $\partial H$  die Flächenladungsdichte

$$\boxed{\omega(\vec{x} \in \partial H) = -\frac{q}{4\pi a^2}}$$

befinden. Diese Flächenladung wird durch die Punktladung  $q$  **induziert** ("Influenz").

## 6.2 Kapazitäten von Leitern

Ein Leiter nehme das beschränkte Gebiet  $G$  ein und sei auf dem festen Potential  $\varphi_1(\vec{x}) = U_1$ ,  $\vec{x} \in G$ . Falls das Randwertproblem

$$\Delta\varphi_1(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \notin G; \quad \varphi_1(\vec{x}) = U_1, \quad \vec{x} \in \partial G,$$

eine Lösung hat, so ist die auf dem Leiter vorhandene Ladung  $Q_1$  durch

$$Q_1 = -\epsilon_0 \int_{\partial K} \text{grad}\varphi_1 \cdot d\vec{f}, \quad G \subset K,$$

gegeben, wobei  $K$  eine Kugel ist, die das Gebiet  $G$  ganz enthält. Hat der Leiter dagegen das feste Potential  $U_2$ , so ist die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta\varphi_2(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \notin G; \quad \varphi_2(\vec{x}) = U_2, \quad \vec{x} \in \partial G,$$

wegen der Eindeutigkeit der Lösung und der Linearität der Poisson-Gleichung durch

$$\varphi_2(\vec{x}) = U_1^{-1} U_2 \varphi_1(\vec{x}), \quad U_i = \text{const.}$$

gegeben. Die nun auf  $G$  befindliche Ladung ist

$$Q_2 = -\varepsilon_0 \int_{\partial K} \text{grad} \varphi_2 \cdot d\vec{f} = U_1^{-1} U_2 Q_1 ,$$

d.h.

$$\boxed{Q_2/U_2 = Q_1/U_1 .}$$

$Q$  und  $U$  sind demnach zueinander proportional. Der Quotient  $Q/U = C$  hängt nur von der Geometrie des Leiters ab und heißt: **Kapazität**. Es gilt  $C > 0$ . Beweis: Die in  $R^3 - G$  enthaltene Feldenergie ist durch

$$\begin{aligned} W(R^3 - G) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3 - G} \vec{E}^2 d^3x = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3 - G} \vec{E} \cdot \text{grad} \varphi d^3x \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R^3 - G} \text{div}(\vec{E} \cdot \varphi) d^3x , \end{aligned}$$

gegeben, da  $\text{div} \vec{E} = 0$  in  $R^3 - G$ . Weil  $\vec{E} \cdot \varphi$  im Unendlichen mindestens wie  $\|\vec{x}\|^{-3}$  verschwindet, erhält man analog wie früher (s. z.B. S. 42):

$$\begin{aligned} W(R^3 - G) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\partial G} \varphi \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{2} U \varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{f} \\ &= \frac{1}{2} U Q = \frac{1}{2} C U^2 > 0, \text{ da } W > 0; \text{ d.h. } C > 0 . \end{aligned}$$

Bei einer Kugel vom Radius  $a$ , die sich auf dem Potential  $U$  befindet, hat man:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \frac{Ua}{\|\vec{x}\|} \text{ für } \|\vec{x}\| \geq a, \text{ bzw.} \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{Ua}{\|\vec{x}\|^2} \vec{e}_r . \end{aligned}$$

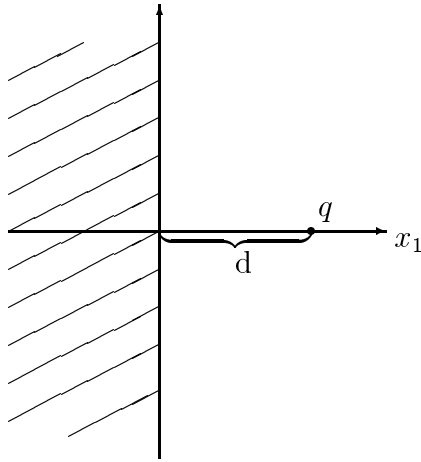
Dazu gehört die Flächenladungsdichte  $\omega = \varepsilon_0 U/a$  und die Gesamtladung  $Q = 4\pi\varepsilon_0 Ua$ , d.h. **die Kapazität einer Kugel vom Radius  $a$  ist  $C = 4\pi\varepsilon_0 a$** .

Verallgemeinerung für mehrere Leiter  $G_i$ , die sich auf dem Potential  $U_i$  befinden und die Ladung  $Q_i$  tragen:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} U_k, \quad i = 1, \dots, n ,$$

d.h. es besteht ein **linearer Zusammenhang zwischen den  $Q_i$  und  $U_i$**  !

## 6.3 Spiegelladungen



Eine Punktladung  $q$  befinde sich im Punkte  $(d, 0, 0)$  gegenüber einer leitenden Ebene  $x_1 \leq 0$ , die geerdet ist ( $\varphi = 0$ ), und eine endliche Dicke hat.

Man kann das Randwertproblem für  $x_1 \geq 0$  dadurch lösen, daß man an die Stelle  $(-d, 0, 0)$  eine **fiktive Ladung**  $-q$  setzt:

$$x_1 \geq 0: \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{[(x_1 - d)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{q}{[(x_1 + d)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Offenbar ist  $\varphi(\vec{x}, x_1 = 0) = 0$ ,  $\forall x_2, x_3$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \vec{E}(x_1 = 0) &= E_1(x_1 = 0) \vec{e}_1 \quad \text{mit} \\ E_1(x_1 = 0) &= \| -\text{grad}\varphi|_{x_1=0} \| = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}, \quad \text{wobei} \\ \|\vec{x}\|^3 &= (d^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = 0. \end{aligned}$$

Hierzu gehört die Flächenladungsdichte

$$\omega = \epsilon_0 E_1(x_1 = 0) = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}, \quad x_1 = 0.$$

Die auf der Ebene induzierte Gesamtladung ist

$$\int \int_{x_1=0} \omega \|d\vec{f}\| = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\eta d\eta d\varphi}{(\eta^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = qd \left[ \frac{1}{(\eta^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_0^\infty = -q!$$

Das von der Ebene am Orte  $(d, 0, 0)$  erzeugte Feld  $\vec{E}'$  hat den Wert<sup>1</sup>

$$\vec{E}'(\vec{x} = (d, 0, 0)) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}\vec{e}_1,$$

und damit wirkt auf  $q$  die ("Bild")-Kraft

$$\boxed{\vec{K}(q, \vec{x} = (d, 0, 0)) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}\vec{e}_1.}$$

In diesem "Influenz"-Falle ist die Kraft auf  $q$  also **proportional zu  $q^2$ !**

---

1

$$\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{x} = (d, 0, 0)) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \|\vec{d}\vec{f}\| \frac{\omega(\vec{y}, y_1 = 0)(\vec{x} - (0, y_2, y_3))}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\varphi \eta d\eta \frac{(d, 0, 0) - (0, \eta \cos \varphi, \eta \sin \varphi)}{(\eta^2 + d^2)^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd^2}{2} \int_0^\infty d(\eta^2) \frac{1}{(\eta^2 + d^2)^3} \vec{e}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \vec{e}_1 \end{aligned}$$

# Kapitel 7

## Ströme und magnetische Kräfte

Ähnlich wie elektrische Felder auf ruhende Ladungen wirken und umgekehrt Ladungen elektrische Felder erzeugen, **so wirken magnetische Felder auf bewegte Ladungen (Ströme) und bewegte Ladungen, Ströme, erzeugen magnetische Felder.**

Wichtiger Unterschied gegenüber dem elektrischen Fall: **es gibt keine magnetischen Ladungen**, d.h. man hat bisher experimentell keine gefunden (selbst nicht im Material vom Mond)!

### 7.1 Stationäre Ströme und Ohmsches Gesetz

Bewegte Ladungen kann man (s. S. 5) mathematisch mittels der Stromdichte beschreiben:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \tilde{\rho}(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t),$$

$\tilde{\rho}$  : Dichte der **bewegten** Ladungen.

**Im allgemeinen ist  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  stückweise stetig**, läßt sich jedoch durch geeignete Interpretation auch auf **bewegte Punktladungen**, bzw. **linienförmige Stromverteilungen** anwenden!

**Punktladungen:**  $\vec{y}(t)$  sei der zeitabhängige Ortsvektor der Punktladung  $q$ , dann ist

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q \vec{v}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y}(t)).$$

**Stromfäden:** Durch einen linienförmigen Leiter  $C$  mit der Parameterdarstellung  $\vec{x}(\tau)$ ,  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  fließe ein Strom  $I$ , dann gilt

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = I \int_C d\vec{y} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \equiv I \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d\vec{y}}{d\tau} \delta(\vec{x} - \vec{y}(\tau)).$$

Erläuterung: Der Stromfaden sei Teil der  $x_3$ -Achse (einfaches Beispiel !):  
 $\tau = y_3$ ,  $\vec{y}(\tau) = (0, 0, y_3)$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = I \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} dy_3 \vec{e}_3 \delta[\vec{x} - (0, 0, y_3)],$$

Durch eine Fläche (Ebene)  $F^\uparrow$ , die senkrecht zur  $x_3$ -Achse steht, fließt dann der Strom

$$\begin{aligned} I(F^\uparrow) &= \int_{F^\uparrow} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{f} = \int_{F^\uparrow} \vec{j}(\vec{x}, t) dx_1 dx_2 \cdot \vec{e}_3 \\ &= I \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} dy_3 \int_{F^\uparrow} dx_1 dx_2 \cdot \delta(\vec{x} - (0, 0, y_3)) \\ &= I \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} dy_3 \delta(x_3 - y_3), \end{aligned}$$

d.h.  $I(F^\uparrow) = I$  falls  $x_3 \in [x_3^{(1)}, x_3^{(2)}]$ , sonst  $I(F^\uparrow) = 0$ .

$$\boxed{\text{Stationäre Ströme : } \partial_t \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 ;}$$

d.h. die Stromverteilungen sind in diesem Falle zeitlich konstant.

In metallischen Leitern hat man eine nichtverschwindende Stromdichte nur, falls im Innern des Leiters ein Feld  $\vec{E}$  (meistens von außen "angelegt") herrscht. Für homogene Leiter gilt in guter Näherung das Ohmsche Gesetz (experimentell !).

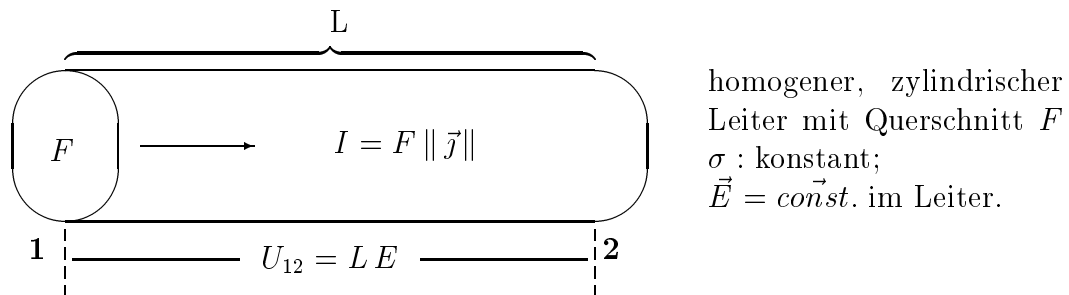
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{j}(\vec{x}) &= \sigma \vec{E}(\vec{x}), \quad \sigma > 0 ; \\ \sigma &: \text{Leitfähigkeit.} \end{aligned}}$$

$\sigma$  hängt vom Material des Leiters ab. Das Ohmsche Gesetz ist keine universelle Beziehung. Physikalischer Hintergrund: in einem Leiter bewegt sich ein Teilchen mit Ladung  $q$  wegen seiner vielen Zusammenstöße wie in einem "zähen" Medium, d.h. mit "**Reibung**". In solchen Fällen sind die Kraft  $q\vec{E}$  und die mittlere Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zueinander proportional:

$$\boxed{\vec{v}(\vec{x}) = bq\vec{E}(\vec{x}), \quad b = \text{const.}}$$

Andererseits gilt  $\vec{j} \sim \vec{v}$ .

Konventionelle Form des Ohmschen Gesetzes:



Zwischen den Querschnitten "1" und "2" herrscht die Spannung

$$\begin{aligned} U_{12} &= L \|\vec{E}\| = (L/\sigma) \|\vec{j}\| = \left(\frac{L}{\sigma F}\right) I \\ &= RI; \quad \text{mit } R = \frac{L}{\sigma F}. \end{aligned}$$

Folgerungen aus den Gleichungen

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho :$$

Wenn  $\sigma$  räumlich und zeitlich konstant ist, dann gilt für stationäre Ströme:

$$\partial_t \vec{j} = 0 \Rightarrow \partial_t \vec{E} = 0 \Rightarrow \partial_t \rho = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 .$$

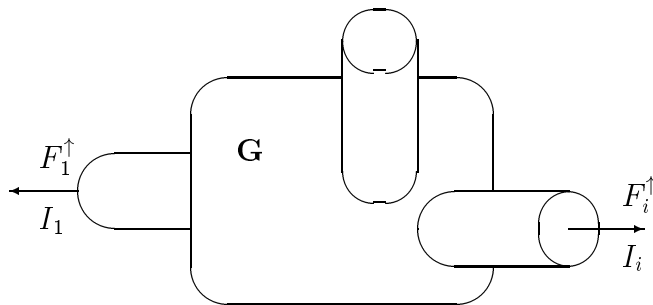
Hieraus folgt:

1.  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  und damit  $\rho(\vec{x}) = 0$ , d.h. in einem von einem stationären Strom durchflossenen homogenen Leiter gibt es keine **Raumladungen**.
2. An der Grenzfläche zwischen 2 Leitern mit Leitfähigkeiten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  tritt an die Stelle von  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  (s. S: 25-26)

$$\vec{j}_n^{(1)} = \vec{j}_n^{(2)}, \quad \vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(2)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sigma_1} \vec{j}_t^{(1)} = \frac{1}{\sigma_2} \vec{j}_t^{(2)} .$$

Ist das 2. Medium Vakuum, so ist  $\vec{j}_n^{(1)} = \vec{j}_n^{(2)} = 0$ , d.h. im Leiter fließen keine Ladungen auf den Rand zu.

3.



In ein Gebiet  $G$  münden  $n$  Leiter mit Querschnitten  $F_i^\uparrow$  (Normale nach außen), durch die  $n$  stationäre Ströme  $I_i$  fließen, dann folgt:

$$0 = \int_G \operatorname{div} \vec{j} d^3 \vec{x} = \int_{\partial G} \vec{j} \cdot d\vec{f} = \sum_{j=1}^n \int_{F_j^\uparrow} \vec{j} \cdot d\vec{f} =$$

$$\sum_{k=1}^n I(F_k^\uparrow) = 0 :$$

Das **Kirchhoffsche Stromverzweigungsgesetz** für stationäre Ströme!

## 4. Joulesche Wärme

Das die Stromdichte  $\vec{j}$  erzeugende Feld  $\vec{E}$  **leistet Arbeit an den bewegten Ladungen, die ihrerseits den Energiezuwachs durch "Reibung" (Zusammenstöße) an die Umgebung abgeben:**

Bei einem Massenpunkt, auf den die Kraft  $\vec{K}$  wirkt, hat man als Leistung  $\vec{v} \cdot \vec{K}$ . Daher hat man in unserem Fall als Leistungsdichte:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{k}(\vec{x}) &= \vec{v}(\vec{x}) \cdot \tilde{\rho}(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}), \\ \tilde{\rho}(\vec{x}) &: \text{Dichte der bewegten Ladungen.} \end{aligned}$$

Damit bekommt man für die pro Zeit- und Volumeneinheit an den Leiter abgegebene Energie  $l(\vec{x})$  (Leistungsdichte):

$$l(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2(\vec{x}) = \sigma \vec{E}^2(\vec{x}).$$

Beispiel: gerades Drahtstück, in dem  $\vec{j} = \text{const.}$ ,  $L$ : Länge des Drahtes,  $F$ : Querschnitt. Die an den Draht abgegebene Leistung ist

$$\int_{\text{Draht}} d^3 \vec{x} \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2 = \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2 FL = \frac{L}{\sigma F} I^2(F) = I^2(F) R,$$

$R$  : Widerstand des Drahtes.

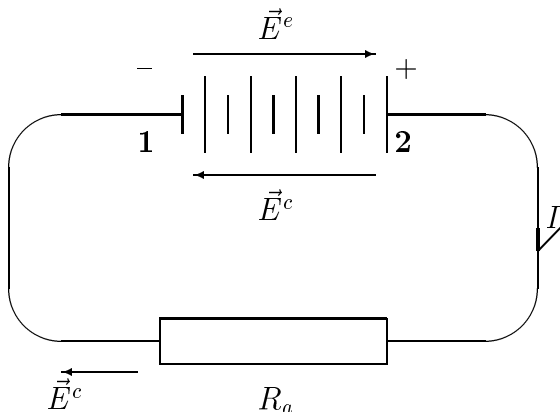
## 5. "Elektromotorische" Kräfte

Aus der Mechanik weiß man, daß sich Reibungskräfte nicht aus einem Potential ableiten lassen, d.h. i. a. setzt sich die "treibende" Feldstärke  $\vec{E}$  in  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  aus 2 Anteilen zusammen:

$$\vec{E} = \vec{E}^c + \vec{E}^e, \quad \text{rot} \vec{E}^c = 0.$$

$\vec{E}^c$  kann dabei von Aufladungen an Rändern herrühren,  $\vec{E}^e$  kennzeichnet z.B. den Lösungsdruck für Ionen, falls man ein Metall in eine Flüssigkeit taucht. (Im Gleichgewicht gilt  $\vec{E}^c + \vec{E}^e = 0$  und dann  $\vec{j} = 0$ .)

Beispiel: Batterie mit äußerem Widerstand  $R_a$ .



Bei einem geschlossenen Integrationsweg (Batterie, Draht, Widerstand) gilt:

$$\oint \vec{E}^c \cdot d\vec{x} = 0.$$

Die Integration ergibt dann, falls durch den Kreis der Strom  $I$  fließt, mit  $\vec{E}^c + \vec{E}^e = \frac{1}{\sigma}(I/F)\vec{n}$ , ( $F$ : Leiterquerschnitt,  $\vec{n}$ : Normale von  $F$ ):

$$I \oint \frac{1}{F\sigma} d\vec{x} \cdot \vec{n} = \oint (\vec{E}^c + \vec{E}^e) \cdot d\vec{x} = \oint \vec{E}^e \cdot d\vec{x} = \int_1^2 \vec{E}^e \cdot d\vec{x} \equiv \mathcal{E},$$

$\mathcal{E}$  : "elektromotorische" Kraft, bzw. Spannung der Batterie;

$$\oint \frac{1}{F\sigma} d\vec{x} \cdot \vec{n} = R \quad : \quad \text{Gesamtwiderstand des Systems, also}$$

$$IR = \mathcal{E}.$$

$IR_a$  ist der Spannungsabfall im äußeren Teil des Kreises;  $R - R_a$  bezeichnet man als Innenwiderstand  $R_i$ .

## 7.2 Kräfte auf bewegte Ladungen in magnetischen Feldern

Analog zu der Kraft  $\vec{K}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$  auf eine Punktladung  $q$  durch ein elektrisches Feld werden in dem Feld eines Magneten, beschrieben durch die **zu  $\vec{E}$  analoge magnetische Induktion  $\vec{B}(\vec{x})$ , Kräfte auf eine mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{x})$  bewegte Punktladung ausgeübt** (sog. "Lorentz"-Kraft):

$$\boxed{\vec{K}(\vec{x}) = q(\vec{v} \times \vec{B})(\vec{x})}.$$

Diese Gleichung liefert u.a. eine mögliche Meßvorschrift zur Bestimmung von  $\vec{B}(\vec{x})$ . Analog zum Coulomb-Gesetz wird angenommen, daß das durch die bewegte Punktladung erzeugte Magnetfeld (s. später) schwach gegenüber  $\vec{B}$  ist.

Wegen  $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$  folgt  $\vec{v} \cdot \vec{K} = 0$ , d. h. **das  $\vec{B}$ -Feld leistet an der Punktladung keine Arbeit !!** Nur die Richtung des Impulses wird beeinflusst!

Hat man am Ort  $\vec{x}$  die **Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$** , so bekommt man statt der obigen Formeln (wegen  $\Delta q = \rho\Delta V$ ) für die **räumliche Kraftdichte  $\vec{k}$** :

$$\boxed{\vec{k}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})(\vec{v} \times \vec{B})(\vec{x}) = \vec{j} \times \vec{B}(\vec{x})}.$$

Sind die Stromdichten  $\vec{j}$  nur in einem beschränkten Gebiet  $G$  von Null verschieden, so wirkt auf sie die Gesamtkraft

$$\vec{K}(G) = \int_G d^3\vec{x} \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}).$$

Es sei  $C = \vec{x}(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2]$  ein Stromfaden, durch den ein Strom der Stärke  $I$  fließt. Da  $\Delta q = I\Delta t$ ,  $\Delta t$ : Zeitintervall, und  $\vec{v} \approx \Delta\vec{x}/\Delta t$ , so bekommt man aus der Lorentzkraft:

$$\Delta\vec{K} \approx I(\Delta\vec{x} \times \vec{B}).$$

Division durch  $\Delta\tau$  und der Limes  $\Delta\tau \rightarrow 0$  ergeben die **Linienkraftdichte**:

$$\frac{d\vec{K}}{d\tau} = I \left( \frac{d\vec{x}}{d\tau} \times \vec{B}(\vec{x}) \right),$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} : \text{Tangentialvektor an } C \text{ in } \vec{x}(t).$$

Auf  $C$  wirkt insgesamt die Kraft

$$\vec{K}(C) = I \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\vec{x}}{d\tau} \times \vec{B}[\vec{x}(\tau)] d\tau.$$

Beispiel:  $\vec{B} = \text{const.}$  und  $C$  sei geschlossen ( $\vec{x}(\tau_1) = \vec{x}(\tau_2)$ ), dann gilt:

$$\vec{K}(C) = -I\vec{B} \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau = 0.$$

Andererseits gilt für das **Drehmoment**

$$\vec{N}(C) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{x}(\tau) \times \frac{d\vec{K}}{d\tau} d\tau = I \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{x}(\tau) \times \left( \frac{d\vec{x}}{d\tau} \times \vec{B} \right) d\tau.$$

Wegen

$$\vec{x} \times \left( \frac{d\vec{x}}{d\tau} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{B})) + \frac{1}{2} (\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{d\tau}) \times \vec{B}, \quad \vec{B} = \text{const.},$$

folgt:

$$\vec{N}(C) = \vec{m} \times \vec{B},$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{x}(\tau) \times \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau.$$

$\vec{m}$ : "magnetisches" Moment des geschlossenen Stromfadens.

Beispiel:  $C$  sei ein Kreis mit Radius  $a$  in der Ebene  $x_3 = 0$ , dann gilt

$$\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{x}(\tau) \times \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau = \pi a^2 \vec{e}_3$$

Liegt  $\vec{B}$  parallel zu  $\vec{e}_1$ , so ist  $\vec{N}$  parallel zu  $\vec{e}_2$ .

# Kapitel 8

## Die Erzeugung von magnetischen Feldern durch bewegte Ladungen

### 8.1 Das Gesetz von Biot und Savart

Eine Ladungsverteilung  $\rho(\vec{y})$  erzeugt das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{y} \rho(\vec{y}) \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3},$$

bzw. eine Punktladung  $q$  am Orte  $\vec{y}$  das Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3}, \quad \left( \begin{array}{l} \text{experimentelles} \\ \text{Resultat !!} \end{array} \right)$$

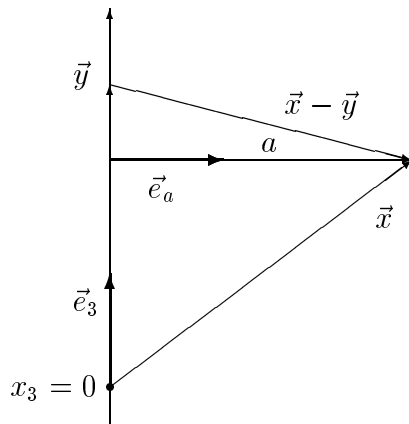
Analoges haben **Biot und Savart** im magnetischen Fall gefunden : **Wird ein Stromfaden**  $C = \{\vec{y}(\tau), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$  **vom Strom**  $I$  **durchflossen**, so ist der **Beitrag des Stromes**  $I$  **im Punkte**  $\vec{y}(\tau) \in C$  **zu der magnetischen Induktion im Punkte**  $\vec{x}$  **gegeben durch:**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{d\tau}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{d\vec{y}}{d\tau} \times \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right), \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am}, \end{aligned}$$

und der Gesamtbeitrag von  $C$  ist:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \frac{d\vec{y}}{d\tau} \times \frac{(\vec{x} - \vec{y}(\tau))}{\|\vec{x} - \vec{y}(\tau)\|^3} \right] d\tau.$$

**Beispiel:**  $C$  sei die (unendlich lange)  $x_3$ -Achse:  $\tau = y_3$ ,  $\vec{y} = (0, 0, y_3)$ ,  $d\vec{y}/d\tau = \vec{e}_3$ .



Die Einführung von Zylinderkoordinaten  $(a, \varphi, x_3)$  ergibt:  $e_3 \times (\vec{x} - \vec{y}) = a\vec{e}_\varphi$ , also

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{e}_\varphi a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_3}{(a^2 + (y_3 - x_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{e}_\varphi a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{y}_3}{(a^2 + \tilde{y}_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tilde{y}_3 = y_3 - x_3 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{e}_\varphi \frac{1}{a} \left[ \frac{\tilde{y}_3}{(a^2 + \tilde{y}_3^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{a} \vec{e}_\varphi,\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{a} \vec{e}_\varphi,}$$

d.h.  $\vec{B}$  hat weder eine Komponente in  $x_3$ -Richtung noch in  $\vec{e}_a$ -Richtung.

Bringt man parallel zu  $C$  im Abstand  $a$  einen zweiten geraden Stromfaden  $C_1$  der Länge  $l_1$  mit dem Strom  $I_1$ , so wirkt auf diesen nach Seite 52 die Kraft ( $C_1$  wird als Teilstück eines sehr langen Stromfadens angesehen!):

$$\vec{K}(l_1) = I_1 \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} \vec{e}_3 \times \vec{B}(a) dx_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I \frac{l_1}{a} \vec{e}_3 \times \vec{e}_\varphi,$$

$$\boxed{\vec{K}(l_1)/l_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I \frac{1}{a} \vec{e}_a;}$$

d. h. falls  $I_1 \cdot I > 0$  (Ströme parallel), so ziehen sich die beiden Drähte an!

**Die obige Gleichung wird zur Definition der Stromeinheit "Ampere"  $\equiv \mathbf{A}$  benutzt:** Fließt durch zwei parallele Drähte ein Strom gleicher Richtung und gleichen Betrages, so ist das Maß dieses Stromes 1 A, falls bei einem Abstand  $a$  von 1 m die auf 1 m Länge des Drahtes wirkende anziehende Kraft  $2 \cdot 10^{-7} \text{ m kg/s}^2$  beträgt!

Hat man anstelle eines Stromfadens eine Stromdichte, so bekommt man nach Biot und Savart

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{j}(\vec{y}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} .}$$

(Einsetzen von  $\vec{j}$  auf S. 47 führt auf den Fall des Stromfadens zurück !). Da

$$\text{rot}_x \left( \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) = \frac{\vec{j}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3},$$

so kann man schreiben :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \text{rot} \vec{A}(\vec{x}), \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} .}$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  und  $\vec{j}_n = 0$  an der Grenzfläche des Leitergebietes  $G$  muß

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$$

gelten!

Beweis: Aus der Identität

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} &= \frac{\operatorname{div}_y \vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \operatorname{div}_y \left( \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) \quad \text{folgt} \\ \operatorname{div} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3y \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{\vec{j} \cdot d\vec{f}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = 0, \\ &\text{da } \operatorname{div} \vec{j} = 0 \text{ in } G \text{ und } \vec{j}_n = 0 \text{ auf } \partial G. \end{aligned}$$

Ferner folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{A})}_{=0} - \Delta \vec{A} \\ &= -\Delta \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta_x \left( \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

erhält man

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \int d^3y \vec{j}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}).$$

Also:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) && \text{für stationäre Ströme,} \\ \text{bzw.: } \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}, && \operatorname{div} \vec{A} = 0, \\ &&& \text{wobei } \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Wegen  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  gilt außerdem

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0 : \text{ es gibt (bisher) keine magnetischen Ladungen!}}$$

$F^\uparrow$  sei ein glattes einfach zusammenhängendes Flächenstück mit Rand  $\partial F^\uparrow$ , dann folgt aus  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  und dem Stokesschen Satz:

$$\boxed{\mu_0 I(F^\uparrow) \equiv \mu_0 \int_{F^\uparrow} \vec{j} d\vec{f} = \int_{F^\uparrow} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial F^\uparrow} \vec{B} \cdot d\vec{x} .}$$

Anwendung: ein zylindrischer Leiter vom Radius  $a$  erstreckt sich längs der gesamten  $x_3$ -Achse. In Zylinder-Koordinaten hat  $\vec{B}$  die Form  $\vec{B}(\vec{x}) = B(r)\vec{e}_\varphi$ .

Beweis:  $\vec{j} = (I/\pi a^2)\vec{e}_3$ . Nach S. 54 gilt dann für  $\vec{B}(\vec{x})$ :

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 a^2} \vec{e}_3 \times \int d^3 y \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 a^2} \vec{e}_3 \times \text{grad}_x \int \frac{d^3 y}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.$$

Das Integral

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta d\varphi dy_3 \frac{\eta}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

hängt nur von  $r$  ab<sup>1</sup>, und da  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$ , so folgt die Behauptung!

Für eine Kreisfläche  $F^\dagger = K^{(2)}(r)^\dagger$ ,  $\|F^\dagger\| = \pi r^2$  gilt dann

$$I(K^{(2)}(r)) = \begin{cases} \frac{I r^2}{a^2} & \text{für } r \leq a \text{ und} \\ I & \text{für } r \geq a \end{cases},$$

d. h.

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & \text{für } r \leq a \text{ und} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{für } r \geq a \end{cases}.$$

## 8.2 Magnetische Dipole

Ist die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x})$  nur in einem beschränkten Gebiet  $G$  (in der Umgebung des Koordinatenursprungs) von Null verschieden, so kann man das **”Vektorpotential”**

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3 y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|},$$

ganz analog zum elektrostatischen Potential (s.S. 35), für sehr große  $\|\vec{x}\|$ ,  $\vec{x} \notin G$ , nach ”Multipolen” (diesmal magnetischen!) entwickeln:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{\|\vec{x}\|} \left( \int_G d^3 y \vec{j}(\vec{y}) \right) + \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \int d^3 y (\vec{y} \cdot \vec{x}) \vec{j}(\vec{y}) + \dots \right]$$

Zunächst gilt

$$\boxed{\int_G d^3 y \vec{j}(\vec{y}) = 0.}$$

Beweis: Wegen  $\text{div} \vec{j} = 0$  hat man

$$0 = \int_G y_i (\text{div} \vec{j}) d^3 y = \int_G \text{div} (y_i \vec{j}) d^3 y - \int_G \vec{j} \cdot \text{grad} (y_i) d^3 y$$

<sup>1</sup>  $x_3 \rightarrow x_3 + a$ , läßt sich durch  $y_3 \rightarrow y_3 - a$  und  $R(\varphi)\vec{x}$  durch  $R^{-1}(\varphi)\vec{y}$  kompensieren, wobei  $R(\varphi)$ : Drehung um  $\vec{e}_3$ -Achse.

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_{\partial G} y_i \vec{j} \cdot d\vec{f}}_{= 0, \text{ da } \vec{j}_n = 0} - \int j_i d^3 y, \\
&\text{d.h. } \int j_i d^3 y = 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Beim 2. Term hat man Integrale der Form  $\int d^3 y y_i j_k$ . Aus

$$y_i y_k \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(y_i y_k \vec{j}) - \vec{j} \cdot \operatorname{grad}(y_i y_k)$$

folgt analog wie vorher:

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\int_{\partial G} (y_i y_k \vec{j}) \cdot d\vec{f}}_{= 0, \text{ da } \vec{j}_n = 0} - \int_G \vec{j} \cdot \operatorname{grad}(y_i y_k) \\
&= 0, \text{ da } \vec{j}_n = 0,
\end{aligned}$$

also

$$\int (y_i j_k + y_k j_i) d^3 y = 0.$$

Da

$$y_i j_k = \frac{1}{2}(y_i j_k + y_k j_i) + \frac{1}{2}(y_i j_k - y_k j_i)$$

und

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{j} - \vec{y} (\vec{x} \cdot \vec{j}) = (\vec{y} \times \vec{j}) \times \vec{x},$$

so bekommt man für den 2. Term:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \frac{1}{2} \int (\vec{y} \times \vec{j}) \times \vec{x} d^3 y \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}, \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 y (\vec{y} \times \vec{j})
\end{aligned}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment der durch  $\vec{j}$  beschriebenen Stromverteilung.

Mit  $\vec{j}(\vec{x}) = I \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \delta(\vec{x} - \vec{y}(\tau)) d\vec{y}/\tau$  erhält man für  $\vec{m}$  den Ausdruck auf S. 52.

$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x})\vec{x}}{\|\vec{x}\|^5} - \frac{\vec{m}}{\|\vec{x}\|^3} \right), \quad \vec{x} \neq 0.$$

Für einen fast punktförmigen magnetischen Dipol  $\vec{m}$  in der Nähe des Punktes  $\vec{x} = 0$  ergibt sich als Kraft in einem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_{ex}(\vec{x})$  analog zum elektrischen Dipol (s.S. 37):

$$\begin{aligned}
\vec{K}_{ex} &= \int_G d^3 y \vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}_{ex}(\vec{y}) = \int_G d^3 y \vec{j}(\vec{y}) \times (\vec{B}_{ex}(0) + \sum_i y_i \partial_i \vec{B}_{ex}(0) + \dots) \\
&= [(\vec{m} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B}_{ex}](0) \equiv \sum_{j=1}^3 m_j \partial_j \vec{B}_{ex}(0) \\
&= \operatorname{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}_{ex})(0).
\end{aligned}$$

Die Umformung

$$\int d^3y [\vec{j}(\vec{y}) \times (\sum_{i=1}^3 y_i \partial_i \vec{B}_{ex}(0))] = \frac{1}{2} \int d^3y [\sum_{i=1}^3 (\vec{y} \times \vec{j}(\vec{y}))_i \partial_i \vec{B}_{ex}(0)]$$

und die übrigen Umrechnungen machen von den Eigenschaften  $\text{rot} \vec{B}_{ex} = 0$ ,  $\text{div} \vec{B}_{ex} = 0$  in  $G$  und  $\int_G d^3y (y_i j_k + y_k j_i) = 0$  (s. oben) Gebrauch.

### 8.3 Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen aus der Physik der stationären Ströme.

1. Ohmsches Gesetz in seiner einfachsten Form:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sigma \vec{E}(\vec{x}), \quad \sigma(\text{spez. Leitf.}) = \text{const.}$$

Folgerung:

$$\text{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j}_n^{(1)} = \vec{j}_n^{(2)}, \quad \vec{E}_t^{(1)} = \vec{E}_t^{(2)}.$$

Leistungsdichte im Leiter = Joulesche Wärme pro Zeiteinheit:

$$l(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2(\vec{x}) = \sigma \vec{E}^2(\vec{x}).$$

2. Kräfte auf bewegte Ladungen, falls  $\vec{B}$  gegeben ist.

Punktladungen:

$$\vec{K}(\vec{x}, \vec{v}; q) = q(\vec{v} \times \vec{B})(\vec{x}).$$

Stromverteilungen im Gebiet  $G$ :

$$\vec{K}(G) = \int_G d^3x \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}).$$

Stromfäden:

$$\vec{K}(C^\uparrow) = I \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\vec{x}}{d\tau} \times \vec{B}(\vec{x}(\tau)).$$

Magnetisches Moment:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}) \\ &= \frac{I}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \vec{x}(\tau) \times \frac{d\vec{x}}{d\tau} \quad \text{für Stromfäden.} \end{aligned}$$

3. Von Strömen erzeugte magnetische Felder

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \vec{j}(\vec{y}) \times \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[ \frac{d\vec{y}}{d\tau} \times \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right] \quad \text{für Stromfäden.} \end{aligned}$$

Vektorpotential:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \text{rot}\vec{A}, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}, \quad \text{div}\vec{A} = 0 .$$

Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}), & \text{div}\vec{B}(\vec{x}) &= 0 , \\ \text{oder: } \Delta\vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}), & \text{div}\vec{A} &= 0 . \end{aligned}$$

# Kapitel 9

## Das Faradaysche Induktionsgesetz

### 9.1 Herleitung mittels Galilei-Transformationen

Bisher sind nur zeitunabhängige Vorgänge in einem ruhenden Inertialsystem  $I$  betrachtet worden. **Diese Vorgänge können dadurch zeitabhängig werden, daß man sie von einem bewegten Inertialsystem  $I'$  aus betrachtet.**

Falls die Relativgeschwindigkeit  $\vec{u}$  der beiden Inertialsysteme klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist, so sind die Koordinaten  $(\vec{x}, t)$  eines Ereignisses in  $I$  und die Koordinaten  $(\vec{x}', t')$  desselben Ereignisses in  $I'$  durch die folgenden **Galilei-Transformationen** miteinander verknüpft:

$$G(\vec{u}) : \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{u}t, \quad t \rightarrow t' = t,$$

$$\vec{u} = \text{const.}, \quad \|\vec{u}\| \ll c : \text{ Lichtgeschwindigkeit.}$$

In der Mechanik fordert man, daß alle Inertialsysteme physikalisch äquivalent sind, d.h. die physikalischen Grundgleichungen sollen in allen Inertialsystemen die gleiche Gestalt haben. Um die bisher in  $I$  diskutierten Phänomene in  $I'$  zu beschreiben, müssen wir herausfinden, wie sich die Feldgrößen  $\rho, \vec{j}, \vec{E}, \vec{B}$  etc. bei Galilei-Transformationen verhalten:  $\rho(\vec{x}, t) \rightarrow \rho'(\vec{x}', t')$  etc.. Die folgenden Transformationen gelten auch, falls die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{j}$  in  $I$  Funktionen der Zeit sind. Wir diskutieren daher zunächst diesen etwas allgemeineren Fall:

Aus der Definition von  $\rho(\vec{x}, t) [= \lim \Delta Q / \Delta V]$  folgt, da  $\Delta Q$  und  $\Delta V$  in  $I$  und  $I'$  dieselben sind:

$$\boxed{\rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}' - \vec{u}t, t).}$$

Dies ist eine Vorschrift, die angibt, wie man die Funktion  $\rho'$  zur Zeit  $t'$  am Orte  $\vec{x}'$  durch den Wert von  $\rho$  am Orte  $\vec{x}' - \vec{u}t$  ausrechnen kann. Anstelle von  $\vec{x}'$  kann man offenbar auch  $\vec{x}$  schreiben:

$$\boxed{\rho'(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t).}$$

Das Transformationsgesetz für die Stromdichte ergibt sich aus der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung in beliebigen Systemen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{j}'(\vec{x}, t) &= -\partial_t \rho'(\vec{x}, t) = -\frac{d}{dt} \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) \\ &= \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) - \partial_t \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) \\ &= \operatorname{div}[\vec{u} \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) + \vec{j}'(\vec{x} - \vec{u}t, t)], \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{j}'(\vec{x}, t) = \vec{u} \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) + \vec{j}(\vec{x} - \vec{u}t, t)},$$

$\vec{u} \rho$  : vom bewegten System aus gesehener "Konvektionsstrom".

In dem Bezugssystem  $I$  haben wir für die Kraftdichte  $\vec{k}(\vec{x}, t)$ :

$$\vec{k}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{j}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t).$$

Aus der Mechanik weiß man, daß  $\vec{k}$  sich folgendermaßen transformiert:

$$\boxed{\vec{k}'(\vec{x}, t) = \vec{k}(\vec{x} - \vec{u}t, t)},$$

also

$$\begin{aligned}\vec{k}'(\vec{x}, t) &= \rho(\vec{x} - \vec{u}t, t) \cdot \vec{E}(\vec{x} - \vec{u}t, t) + \vec{j}'(\vec{x} - \vec{u}t, t) \times \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t, t) \\ &= \rho'(\vec{x}, t) \cdot [\vec{E}(\vec{x} - \vec{u}t, t) - \vec{u} \times \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t, t)] + \vec{j}'(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t, t).\end{aligned}$$

Man bekommt demnach "Galilei-Invarianz" des Kraftgesetzes, falls

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{x}, t) &= \vec{E}(\vec{x} - \vec{u}t, t) - \vec{u} \times \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t, t), \\ \vec{B}'(\vec{x}, t) &= \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t, t),\end{aligned}}$$

d.h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  werden **nicht** unabhängig voneinander transformiert: **ein "bewegtes" Magnetfeld "erzeugt" ein elektrisches Feld.**

Wegen

$$\operatorname{rot}[\vec{a} \times \vec{F}(\vec{x})] = -\sum_{i=1}^3 a_i \partial_i \vec{F} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{F}$$

folgt aus  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , zunächst bei zeitunabhängigem  $\vec{B}$ ,

$$\operatorname{rot} \vec{E}'(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^3 u_i \partial_i \vec{B}(\vec{x} - \vec{u}t) = -\partial_t \vec{B}'(\vec{x}, t),$$

also

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E}'(\vec{x}, t) + \partial_t \vec{B}'(\vec{x}, t) = 0},$$

d.h. ein "bewegtes" Magnetfeld erzeugt elektrische Wirbel!

Bemerkung:

**Die Gleichungen  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  und  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$  sind nicht invariant (kovariant) gegenüber Galilei-Transformationen.**

Verallgemeinerung für beliebige Zeitabhängigkeiten (**Faraday**):

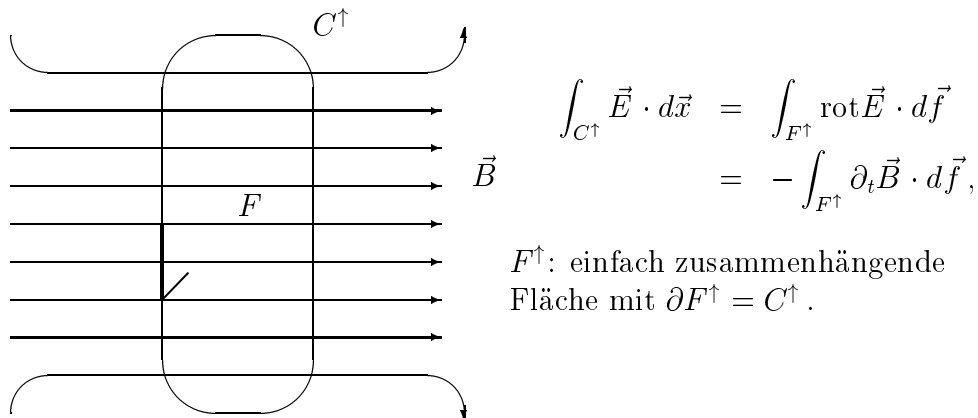
**Jedes zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld und es gilt:**

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}, t) = -\partial_t \vec{B}(\vec{x}, t).$$

Die Richtigkeit dieser Annahme hat sich experimentell in zahllosen Beispielen bestätigt!

## 9.2 Magnetischer Fluß und Induktivitäten

Eine Drahtschleife  $C^\uparrow$  (geschlossen) befinde sich in einem zeitlich veränderlichen Feld  $\vec{B}$ , dann gilt:



Definition:

$$\Phi(F^\uparrow) \equiv \int_{F^\uparrow} \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad : \quad \text{"magnetischer Fluß durch } F^\uparrow\text{"}.$$

Für  $\partial_t \Phi \neq 0$  entsteht in  $C^\uparrow$  **eine "Ringspannung"**, die durch

$$\oint_{C^\uparrow = \partial F^\uparrow} \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d}{dt} \Phi(F^\uparrow)$$

gegeben ist. Schneidet man also die Schleife an einer (beliebigen) Stelle auf, **so kann man dort die Spannung**

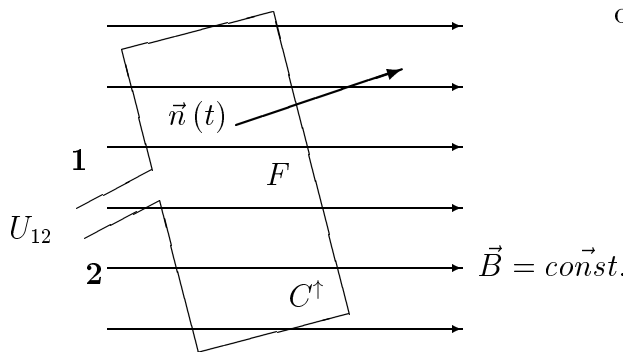
$$-\frac{d}{dt} \Phi(F^\uparrow)(t)$$

**abnehmen!**

Hat die Schleife den Widerstand  $R$ , so fließt in ihr der Strom

$$I(t) \cdot R = -\frac{d}{dt} \Phi(F^\uparrow)(t).$$

Ist das Feld  $\vec{B}$  konstant, so kann man einen zeitlich veränderlichen Fluß  $\Phi$  auch dadurch erzeugen, daß man die Schleife  $C^\uparrow$  in  $\vec{B}$  bewegt, z.B. rotieren läßt (Prinzip der Wechselstrom-Generatoren):



Ist  $F$  die Fläche der Schleife und  $\vec{n}(t)$  die zeitabhängige Normale der rotierenden Schleife, so gilt:

$$\begin{aligned} U_{12}(t) &= \int_C \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{F^\uparrow} \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= -B F \frac{d}{dt} \cos[\vec{B}, \vec{n}]. \end{aligned}$$

Der magnetische Fluß  $\Phi$  durch die Schleife  $C^\uparrow$  kann verschiedene Ursachen haben. Er kann z.B. durch die Stromschleifen  $C_2^\uparrow \dots C_n^\uparrow$  erzeugt sein, in denen die Ströme  $I_2(t), \dots, I_n(t)$  fließen. **Nach Biot-Savart (s.S. 53) ist das  $C^\uparrow$  durchsetzende Feld  $\vec{B}$  proportional zu  $I_2(t), \dots, I_n(t)$ . Außerdem trägt der in  $C^\uparrow$  fließende Strom  $I(t)$  selbst zu  $\Phi$  bei, da er ebenfalls ein Magnetfeld erzeugt (sog. "Selbstinduktion"), d.h. wir haben die Beziehung**

$$\Phi(F^\uparrow) = LI + \sum_{k=2}^n L_k I_k.$$

Die konstanten, nur von der Geometrie abhängigen Koeffizienten  $L$  und  $L_k$  heißen Induktivitätskoeffizienten, und zwar

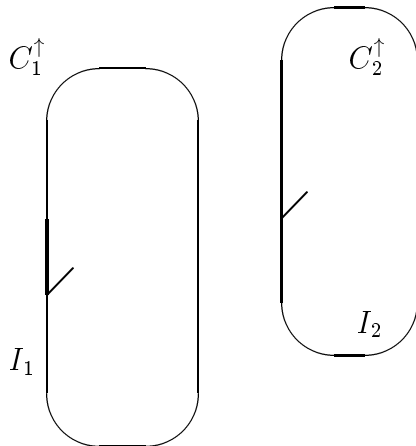
- $L$  : Selbstinduktivität
- $L_k$  : wechselseitige Induktivitäten.

**Beispiel für eine Selbstinduktivität**

Eine lange gerade Luftspule der Länge  $l$  und der Windungszahl  $n$  pro Länge werde vom Strom  $I$  durchflossen. Dann hat man (ohne Beweis) im Innern das Feld  $B = \mu_0 n I$ . Hat die Spule den Querschnitt  $F$ , so ist der Gesamtfluß durch  $n l$  Spulenschleifen:

$$\Phi = n l F B = \mu_0 n^2 F l I, \quad \text{d. h.} \quad L = \mu_0 n^2 F l.$$

**Berechnung der wechselseitigen Induktivitäten:**



Beitrag des Stromes  $I_2$  zum Fluß  $\Phi_1$  durch  $C_1^\uparrow$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= L_{12}I_2 = \int (\vec{B}_2) \cdot d\vec{f}_1 \\ &= \oint_{C_1^\uparrow} \vec{A}_2 \cdot d\vec{x}_1.\end{aligned}$$

Nun ist  $\vec{A}_2$  nach S. 54 durch

$$\vec{A}_2(\vec{x}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2^\uparrow} \frac{d\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|}$$

gegeben, d. h.

$$L_{12}I_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_1^\uparrow} \oint_{C_2^\uparrow} \frac{d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|},$$

also

$$\boxed{L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1^\uparrow} \oint_{C_2^\uparrow} \frac{d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|} = L_{21} .}$$

Anwendungen: s. Literatur

### 9.3 Grundgleichungen der Wechselstromtechnik

Wir betrachten zunächst wieder einen Stromkreis  $C^\uparrow$ , in den jedoch noch eine zusätzliche Spannungsquelle mit Spannung  $U^{(e)}(t)$  eingeschaltet ("elektromotorische" Kraft, "eingeprengte" Spannung, s. S. 51) ist. Die Gleichung für die Gesamtspannung lautet dann:

$$\boxed{I(t) \cdot R = U^{(e)}(t) - \frac{d}{dt} \Phi(F^\uparrow)(t) .}$$

**Allgemein:**

Haben  $n$  Stromschleifen (die selbst wieder Wicklungen sein können)  $C_1^\uparrow, \dots, C_n^\uparrow$  die Widerstände  $R_1, \dots, R_n$ , liegen an ihnen die äußeren Spannungen  $U_1^{(e)}(t), \dots, U_n^{(e)}(t)$  und fließen in ihnen die Ströme  $I_1(t), \dots, I_n(t)$ , so ist die  $k$ -te Schleife von einem magnetischen Fluß

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^n L_{kl} I_l(t)$$

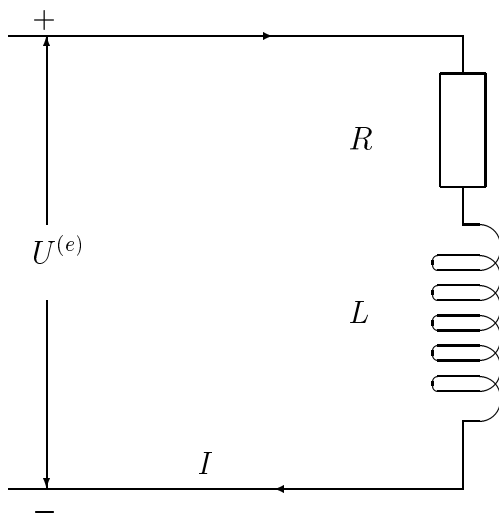
durchsetzt und es gilt:

$$I_k(t)R_k = U_k^{(e)}(t) - \frac{d}{dt}\Phi_k, \quad \text{oder}$$

$$U_k^{(e)}(t) = \sum_{l=1}^n L_{kl} \frac{d}{dt}I_l(t) + R_k I_k(t),$$

**Grundgleichungen der Wechselstromtechnik**

**Beispiel:**



$$IR + L \frac{dI}{dt} = U^{(e)}$$

Kreis geschlossen :

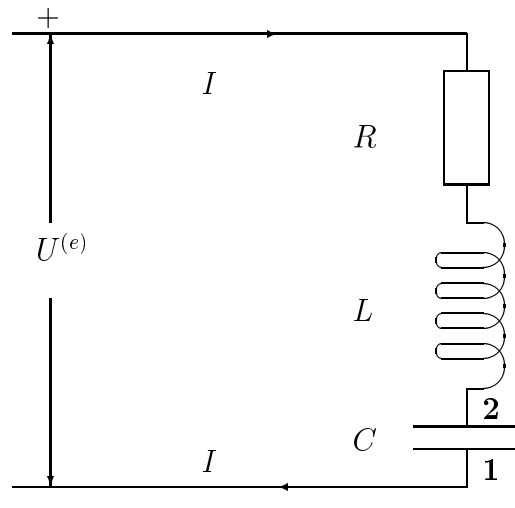
$$U^{(e)} = 0,$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I(t)$$

mit Lösung:

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

**Beispiel:** Wechselstromkreis mit Kapazität:



Nach S. 50 gilt:

$$RI = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}^{(e)}) \cdot d\vec{x},$$

wobei der Weg von der unteren Platte 1 über die EMK, den Widerstand  $R$ , die Spule  $L$  zur oberen Platte 2 verläuft.

Weiter gilt:

$$\int_1^2 \vec{E}^{(e)} d\vec{x} = U^{(e)} \quad \text{und}$$

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} = \varphi_1 - \varphi_2 + \oint \vec{E}^{(ind.)} \cdot d\vec{x},$$

wobei  $U_{12} \equiv \varphi_1 - \varphi_2$  die Spannung ist, die am Kondensator  $C$  liegt. Ferner ist

$$\oint \vec{E}^{(ind.)} \cdot d\vec{x} = -LdI/dt.$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$RI + L \frac{dI}{dt} - U_{12} = U^{(e)}(t).$$

Da der Strom  $I$  durch die zeitliche Änderung der Ladung auf den Platten 1 und 2 gegeben ist, gilt wegen  $\Delta Q = C\Delta U_{12}$  ;  $I = -\Delta Q/\Delta t$ :

$$\begin{aligned} I &= -CdU_{12}/dt, \quad \text{d. h.} \\ LC \frac{d^2 U_{12}}{dt^2} + RC \frac{dU_{12}}{dt} + U_{12} &= -U^{(e)}(t). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird völlig analog zur gedämpften, erzwungenen Schwingung in der Mechanik gelöst:

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + bx = F(t),$$

siehe Mechanik-Vorlesung WS 97/98.

# Kapitel 10

## Die Maxwell'schen Gleichungen

### 10.1 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Bisher sind die folgenden Feldgleichungen für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  diskutiert worden:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}.\end{aligned}$$

Ferner gilt Ladungserhaltung, d. h.

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Für zeitlich veränderliche Ladungsverteilungen  $\rho(\vec{x}, t)$  ist die Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

**nicht** verträglich mit der Kontinuitätsgleichung für die Ladung:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0, \Rightarrow \partial_t \rho = 0.$$

**Maxwell:** Die Gleichungen  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  sind folgendermaßen abzuändern:

Setzt man  $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$  in die Kontinuitätsgleichung ein, so ergibt sich:

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}) = 0.$$

Ersetzt man also  $\vec{j}$  in  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  durch  $\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$ , so erhält man Konsistenz mit der Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}).$$

Aufgrund historischer - heute nicht mehr maßgeblicher - Vorstellungen über den Äther wurde der Zusatz  $\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$  als **”Verschiebungsstrom”** bezeichnet.

Als vollständigen Satz von Feldgleichungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erhalten wir damit für den "materiefreien" Raum

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}). \end{aligned}$$

Hier sind  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  entweder vorgegeben, als ruhende oder bewegte Ladungsverteilungen, oder auch selbst wieder Funktionen von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , z. B.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Die Kontinuitätsgleichung ist jetzt eine **Folge** der obigen Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \right) = -\varepsilon_0 \operatorname{div} \partial_t \vec{E} \\ &= -\varepsilon_0 \partial_t (\operatorname{div} \vec{E}) = -\partial_t \rho(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

## 10.2 Die Maxwellschen Gleichungen als Zeitentwicklungsgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$

In der Mechanik interessiert man sich primär für die Zeitentwicklung der Größen  $q^\alpha(t)$  und  $p^\alpha(t)$  aufgrund der Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha}, \quad \dot{p}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, f.$$

Die **zeitliche Entwicklung** von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ist aufgrund der Maxwellschen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{j}, \\ \partial_t \vec{B} &= -\operatorname{rot} \vec{E}. \end{aligned}$$

Die restlichen Maxwellschen Gleichungen  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  enthalten **keine** Zeitableitungen!

Sie sind in diesem Zusammenhang so zu interpretieren:

Gibt man sich  $\rho, \vec{j}$  sowie  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  zur Zeit  $t = t_0$  vor, so müssen die **Anfangswerte**  $\vec{E}_{t_0}, \vec{B}_{t_0}$  den Bedingungen  $\operatorname{div} \vec{B}|_{t=t_0} = 0, \operatorname{div} \vec{E}|_{t=t_0} = \rho|_{t=t_0}/\varepsilon_0$  genügen!

**Frage:** Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Gleichungen  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  für alle Zeiten  $t$  erfüllt bleiben?

Offenbar muß

$$\partial_t(\operatorname{div} \vec{B}) = 0, \quad \partial_t(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho) = 0,$$

gelten, falls  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  für  $t = t_0$ !

D. h.

$$\begin{aligned} \partial_t \operatorname{div} \vec{B} &= \operatorname{div} \partial_t \vec{B} = -\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0 \quad \text{und} \\ \partial_t \operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \rho &= \operatorname{div}(\partial_t \vec{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \rho \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \rho \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} (\operatorname{div} \vec{j} + \partial_t \rho) = 0, \end{aligned}$$

falls die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist!

Hier erscheint demnach die Kontinuitätsgleichung als Konsistenzbedingung dafür, daß die zeitliche Entwicklung von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit den Anfangsbedingungen  $\operatorname{div} \vec{B}|_{t=t_0} = 0$  und  $\operatorname{div} \vec{E}|_{t=t_0} = \rho|_{t=t_0}/\varepsilon_0$  verträglich bleibt!

## 10.3 Die elektromagnetischen Potentiale

Viele Probleme der Elektrodynamik lassen sich eleganter mit Hilfe von 4 Potential-Funktionen behandeln:

Falls das Gebiet  $G$ , in dem  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  gilt, "sternförmig" ist, sich auf einen beliebigen Punkt im Innern stetig zusammenziehen läßt, so folgt aus  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  für  $\vec{B}$  die Darstellung:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

$\vec{A}$  heißt "**Vektorpotential**". Da  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \chi) = 0$ ,  $\chi(\vec{x}, t)$  beliebig, so ist  $\vec{A}$  bei vorgegebenem  $\vec{B}$  zunächst nur bis auf einen Gradienten bestimmt!

Einsetzen von  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  in  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  ergibt:

$$\operatorname{rot}(\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0.$$

Analog wie oben kann man jetzt schließen, daß eine Funktion  $\varphi(\vec{x}, t)$  existiert, so daß  $\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\operatorname{grad} \varphi$ , d. h.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial_t \vec{A}.$$

Damit sind die "homogenen" Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

bei beliebigen  $\vec{A}$  und  $\varphi$  "identisch" erfüllt! Allerdings werden  $\vec{A}$  und  $\varphi$  durch die "inhomogenen" Gleichungen stark eingeschränkt.

Einsetzen von  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  und  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial_t \vec{A}$  in  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  und  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{A})$  ergibt wegen  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ :

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi - \partial_t \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \text{und} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \mu_0 [\vec{j} - \varepsilon_0 (\partial_t \operatorname{grad} \varphi + \partial_t^2 \vec{A})] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} -\partial_t \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \varphi &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \\ \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{A} - \Delta \vec{A} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \varphi) &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

Dies ist, bei vorgegebenen  $\rho$  und  $\vec{j}$  ein (unangenehm) gekoppeltes System von partiellen Differentialgleichungen für  $\varphi$  und  $\vec{A}$ . Das System läßt sich vereinfachen, wenn man davon Gebrauch macht, daß  $\vec{A}$  und  $\varphi$  bei gegebenen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  noch nicht festgelegt sind: Ist  $\chi(\vec{x}, t)$  eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion, dann gehören zu

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \chi, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

dieselben Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  wie zu  $\varphi$  und  $\vec{A}$ ! Den Übergang  $\varphi, \vec{A} \rightarrow \varphi', \vec{A}'$  bezeichnet man als "**Eichtransformation**". Man kann nun das obige Differentialgleichungs-System vereinfachen, indem man  $\varphi$  und  $\vec{A}$  Nebenbedingungen unterwirft:

### 1. Lorentz-Bedingung oder Lorentz-"Eichung"

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi = 0.$$

Dann bekommt man für  $\varphi$  und  $\vec{A}$  die Gleichungen

$$\square \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j},$$

$$\square \equiv \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 - \Delta \quad : \quad \text{"d'Alembert-Operator"}$$

Genügen  $\varphi$  und  $\vec{A}$  zunächst noch nicht der Lorentz-Bedingung, d. h. gilt

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi \equiv L(\vec{x}, t) \neq 0,$$

so kann man immer ein  $\chi$  finden, so daß die neuen Potentiale  $\varphi'$  und  $\vec{A}'$  der Lorentz-Bedingung genügen:

Aus

$$0 = \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi' = \operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad} \chi) + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t (\varphi - \partial_t \chi)$$

bekommt man nämlich für  $\chi$  die inhomogene Differential-Gleichung

$$\square \chi = L(\vec{x}, t),$$

aus der man ein  $\chi$  bestimmen kann, so daß  $L' = 0$ .

Aus der Gleichung  $\square \chi = L$  sieht man auch noch Folgendes:

Auch wenn die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  der Lorentz-Bedingung  $L = 0$  genügen, so sind diese noch nicht festgelegt. **Es sind immer noch solche Eichtransformationen möglich, für die  $\chi = \chi_0$  gilt, wobei  $\square \chi_0 = 0$ .**

Ist z.B.  $\rho = 0$ , d.h.  $\square \varphi = 0$ , so kann man durch geeignete Wahl von  $\chi_0$

$$\varphi' = \varphi - \partial_t \chi_0 = 0$$

setzen. Es bleiben dann die Gleichungen

$$\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

## 2. Coulomb-Eichung

Hier fordert man

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Die Feldgleichungen für  $\varphi$  und  $\vec{A}$  lauten dann

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \square \vec{A} = \mu_0 (\vec{j} - \varepsilon_0 \operatorname{grad} \partial_t \varphi).$$

Die Lösung der 1. Gleichung ist (s.S. 16)

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.$$

Dies ist in die rechte Seite der letzten Gleichung einzusetzen und man hat dann diese Differential-Gleichung für  $\vec{A}$  zu lösen. Falls zunächst  $\operatorname{div} \vec{A} \neq 0$  ist, dann kann man umeichen:

$$0 = \operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div}(\vec{A} + \operatorname{grad} \chi),$$

d.h.  $\chi$  muß Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta \chi &= -\operatorname{div} \vec{A}, \quad \text{mit} \\ \chi &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\operatorname{div} \vec{A}(\vec{y}, t)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}, \quad \text{sein.} \end{aligned}$$

Falls schon  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  ist, so muß  $\chi = \chi_0$  der Gleichung  $\Delta \chi_0 = 0$  genügen. Beschränkt man sich auf solche  $\chi$ , für die  $\chi_0 \rightarrow 0$  mit  $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ , so bleibt nur die Lösung  $\chi = 0$ ; d.h. **im Falle der Coulomb-Eichung sind die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  festgelegt** (Vorteil der Coulomb-Eichung!)

Die Coulomb-Eichung hat im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie den Nachteil, daß sie i.a. nur in *einem* Inertialsystem gilt, während die Lorentz-Eichung in allen Inertialsystemen gültig ist, falls sie in einem vorliegt (s. später).

# Kapitel 11

## Energie- und Impulsbilanzen

### 11.1 Energieerhaltung in elektrodynamischen Systemen; Energiedichten und Poynting-Vektor

Früher (S. 50) haben wir gesehen, daß ein elektrisches Feld, das auf Ladungen mit der Stromdichte  $\vec{j}$  wirkt, an den Ladungen und ihren Trägern Arbeit leistet, zu der die Leistungsdichte

$$l(\vec{x}, t) \equiv \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$$

gehört (die Lorentz-Kraft gilt auch für zeitabhängige Felder!). Der Ausdruck für  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  läßt sich mittels der Maxwell'schen Gleichungen umformen und uminterpretieren:

$$\begin{aligned} l(\vec{x}, t) &= \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \right) \cdot \vec{E} \\ &= \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} \partial_t \vec{E}^2. \end{aligned}$$

Wegen  $\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B})$  (mathem. Identität) und  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  bekommt man

$$\boxed{-\partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} .}$$

Integriert man über ein zeitlich unveränderliches Gebiet  $G$ , so erhält man, mit  $\vec{S} \equiv (1/\mu_0) \vec{E} \times \vec{B}$ ,

$$\boxed{-\partial_t \int_G d^3x \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = \int_{\partial G} \vec{S} \cdot d\vec{f} + \int_G \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x .}$$

**Interpretation** (analog zum Erhaltungssatz für die Ladung):

$w_e = (\varepsilon_0/2) \vec{E}^2$  ist die Energiedichte des elektrischen Feldes (s.S. 28). Analog ist  $w_m = (1/2\mu_0) \vec{B}^2$  die Energiedichte des magnetischen Feldes. Die linke Seite der

obigen Gleichung ist also die zeitliche Abnahme der **elektromagnetischen Feldenergie** im Gebiete  $G$ . Der letzte Term auf der rechten Seite gibt die **in  $G$  erzeugte Joulesche Wärme** und der 1. Term den Energiefluß durch die Oberfläche  $\partial G$  an, d.h. analog zur Stromdichte  $\vec{j}$  ist  $\vec{S}$

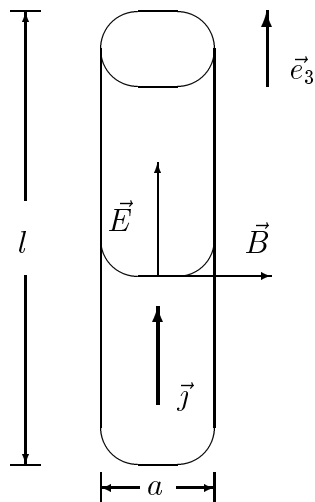
$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}(\vec{x}, t)$$

die lokale **Energieflußdichte** !

$\vec{S}$  heißt Poynting-Vektor. Immer dort, wo  $\vec{E} \neq 0, \vec{B} \neq 0$  und  $\vec{E} \nparallel \vec{B}$ , fließt Energie.

### Beispiel 1:

Ein zylindrischer Leiter vom Radius  $a$  und Länge  $l$ , durch den ein stationärer Strom  $I$  fließt:



$$\vec{B}(\vec{x}) = B(r) \vec{e}_\varphi, \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \frac{r}{a^2}, & r \leq a \\ \frac{1}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_3 = \sigma \vec{E} = \sigma E \vec{e}_3$$

$$r \leq a : \vec{S} = \frac{EB(r)}{\mu_0} \vec{e}_3 \times \vec{e}_\varphi = -\frac{EB(r)}{\mu_0} \vec{e}_\rho,$$

d. h. die Feldenergie fließt von der Oberfläche senkrecht in den Leiter nach innen und wird dort in Joulesche Wärme umgewandelt:

Da  $\vec{E}$  und  $\vec{B} = const.$ , so gilt  $\partial_t w_e = 0, \partial_t w_m = 0$ , und

$$\begin{aligned} \int_{\text{Zylinderoberfläche}} \vec{S} \cdot d\vec{f} &= \int_{\text{Mantel}} \vec{S} \cdot \vec{e}_\rho \|d\vec{f}\| \\ &= -\frac{EB(a)}{\mu_0} \cdot 2\pi a l \\ &= -E I l = -j E \pi a^2 l; \end{aligned}$$

$jE\pi a^2 l$  ist gerade die Joulesche Wärme im Leiterstück vom Volumen  $\pi a^2 l$ ! Diese wird also der elektromagnetischen Feldenergie entzogen: Bei Anwesenheit von Ladungsträgern bilden die elektromagnetischen Felder kein abgeschlossenes System !

**Beispiel 2:**

Anwendung für die **magnetische** Energiedichte  $w_m = (1/2\mu_0)\vec{B}^2$  :

In einem endlichen Gebiet  $G$  fließen in  $n$  Stromschleifen  $C_1^\uparrow, \dots, C_n^\uparrow$  stationäre Ströme  $I_1, \dots, I_n$ , die magnetische Felder erzeugen. Für die magnetische Energie des Systems gilt dann:

$$W_m = \int_{R^3} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d^3x = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} .$$

Aus der mathematischen Identität

$$\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} + \text{div}(\vec{A} \times \vec{B})$$

folgt

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B} + \frac{1}{2\mu_0} \int \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) d^3x .$$

Da die Stromschleifen im Endlichen liegen, fallen  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  hinreichend stark für  $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$  ab, so daß

$$\int_{R^3} \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) d^3x = \lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} \int_{\partial K(r)} d\vec{f} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0,$$

und mit  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  sowie  $\partial_t \vec{E} = 0$  ist dann:

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{A} \cdot \vec{j} .}$$

Zu den in den  $n$  Schleifen fließenden Strömen gehört die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n I_i \int d\tau_i \delta(\vec{x} - \vec{y}_i(\tau_i)) \frac{d\vec{y}_i}{d\tau_i} .$$

Damit erhalten wir für  $W_m$ :

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \int d\tau_i \vec{A}(\vec{y}_i(\tau_i)) \frac{d\vec{y}_i}{d\tau_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \int_{C_i} d\vec{y} \cdot \vec{A}(\vec{y}) . \end{aligned}$$

Ist nun  $F_i^\uparrow$  eine Fläche mit Rand  $C_i^\uparrow$ , so folgt

$$\int_{C_i^\uparrow} d\vec{y} \cdot \vec{A}(\vec{y}) = \int_{F_i^\uparrow} d\vec{f} \cdot \text{rot} \vec{A} = \int_{E_i} d\vec{f} \cdot \vec{B} = \Phi_i ,$$

d. h. wir erhalten schließlich

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k}$$

für die magnetische Energie des Systems !

**Definition:** Zeitabhängige Vorgänge, für die  $\partial_t \vec{j} \neq 0$ , heißen **"quasistationär"**, falls  $\|\vec{j}\| \gg \varepsilon_0 \|\partial_t \vec{E}\|$ , d.h. falls die Verschiebungsstromdichte gegenüber der normalen Stromdichte vernachlässigbar ist. Die bisher hergeleiteten Beziehungen für stationäre Ströme gelten dann auch für quasistationäre.

## 11.2 Lorentz-Kraft, elektromagnetische Flächenkraft und Feldimpuls

Wie die Coulomb-Kraftdichte in der Elektrostatik, so kann man auch die Lorentz-Kraftdichte  $\vec{k}(\vec{x}, t) = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$  aus einem Maxwell'schen "Spannungstensor"  $T_{ik}$  herleiten, in dem nur noch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vorkommen:

Man eliminiert  $\rho$  und  $\vec{j}$  in  $\vec{k}$  mittels der Maxwell'schen Gleichungen:

$$\vec{k}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\operatorname{rot} \vec{B}) \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \times \vec{B}.$$

Addiert man noch die aus den restlichen Maxwell'schen Gleichungen folgenden Beziehungen

$$0 = -\varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \times \partial_t \vec{B}, \quad 0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \operatorname{div} \vec{B},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{k}(\vec{x}, t) &= \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{S}. \end{aligned}$$

Früher (S. 29) wurde gezeigt, daß

$$\varepsilon_0 (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E})_i = \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik}^e,$$

wobei

$$T_{ik}^e = \varepsilon_0 (E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{E}^2).$$

Analog ergibt sich, daß

$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B}) = \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik}^m,$$

wobei

$$T_{ik}^m = \frac{1}{\mu_0} (B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{B}^2).$$

Mit  $T_{ik} = T_{ik}^e + T_{ik}^m$  erhalten wir daher

$$k_i = \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik} - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t S_i,$$

bzw. in Integralform

$$\vec{K}_{mech.}(G) = \int_G \vec{k} d^3x = \int_{\partial G} \vec{T}_n \|d\vec{f}\| - \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \int_G \vec{S} d^3x,$$

$$\vec{T}_n = T \cdot \vec{n}, \quad T = (T_{ik}), \quad d\vec{f} = \|d\vec{f}\| \vec{n}.$$

Da  $\vec{K}_{mech.} = d\vec{P}_{mech.}/dt$ , so kann man auch schreiben:

$$\frac{d}{dt} [\vec{P}_{mech.}(G) + \varepsilon_0 \mu_0 \int_G \vec{S} d^3x] = \int_{\partial G} \vec{T}_n \|d\vec{f}\|.$$

Interpretation:

$$\vec{p}_{em}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S}(\vec{x}, t)$$

ist die zu **den elektromagnetischen Feldern gehörige Impulsdichte** und

$$\vec{P}_{em}(G) = \int_G \vec{p}_{em}(\vec{x}, t) d^3x$$

der von den elektromagnetischen Feldern getragene Gesamtimpuls im Gebiete  $G$  !

Also ist

$$\frac{d}{dt} [\vec{P}_{mech.}(G) + \vec{P}_{em}(G)] = \int_{\partial G} \vec{T}_n \|d\vec{f}\| = \vec{K}(G),$$

wobei  $\vec{K}(G)$  die auf das System in  $G$  wirkende Gesamtkraft ist, die allein von den Werten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf  $\partial G$  abhängt !

Wird  $G \rightarrow R^3$  und verschwinden  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  hinreichend stark für  $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ , so folgt

$$\vec{P}_{mech.}(R^3) + \vec{P}_{em}(R^3) = \text{const.}$$

Wir werden sehen, daß  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  gilt, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, d.h. wir haben

$$\vec{p}_{em}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S}(\vec{x}, t).$$

# Kapitel 12

## Elektromagnetische Wellen

### 12.1 Ebene elektromagnetische Wellen

**Frage:** Gibt es nichttriviale (d.h.  $\vec{E} \neq const.$ ,  $\vec{B} \neq const.$ ) Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen im ladungs- und stromfreien Raum ?

**Antwort:** Ja, in Form elektromagnetischer Wellen;  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  sind Träger von Energie, Impuls, Drehimpuls etc. durch den materiefreien Raum (z.B. "Licht" von Fixsternen !).

Für  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$  lauten die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned}$$

oder für die Potentiale  $\varphi(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  in der Lorentz-Eichung:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}, & \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \partial_t \vec{A}, \\ \square \vec{A}(\vec{x}, t) &= 0, & \square \varphi(\vec{x}, t) &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi &= 0, & \square &\equiv \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 - \Delta. \end{aligned}$$

Durch entsprechende Eichung (s.S. 71) kann  $\varphi = 0$  angenommen werden.

Bemerkung: die Größe  $\varepsilon_0 \mu_0$  hat die Dimension  $[\text{Geschwindigkeit}]^{-2}$  und  $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$  den Zahlenwert  $2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s} = \text{Lichtgeschwindigkeit } c$  im Vakuum (Entdeckung von Weber vor dem Finden der Maxwell'schen Gleichungen). Unmittelbare Verknüpfung der **optischen** Größe  $c$  mit den **elektromagnetischen** Größen  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$ . Der D'Alembert-Operator

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$$

wird auch als "Wellenoperator" bezeichnet. Dieser Name wird durch die folgende Diskussion plausibel werden.

### 12.1.1 Allgemeine ebene Wellen

Es sei  $\vec{a}(\tilde{t})$  eine 2-mal stetig differenzierbare vektorwertige Funktion von  $\tilde{t}$ . Dann erhält man folgende speziellen Lösungen der obigen Gleichungen:

$$\vec{n} : \text{beliebiger konstanter Einheitsvektor, } \vec{n}^2 = 1 ,$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{a}(\tilde{t}) \equiv \vec{a}\left(t - \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{x}\right), \quad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 .$$

Beweis:

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{a}} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{c} \partial_t (\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0, \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{a}} = \partial_t \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{a},$$

und ferner

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{a}} .$$

Für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\partial_t \vec{a} = -\dot{\vec{a}} \equiv \vec{e}(\tilde{t}), \quad \tilde{t} = t - \frac{1}{c}\vec{n} \cdot \vec{x},$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{e}(\tilde{t}); \quad \vec{n} \cdot \vec{e}(\tilde{t}) = 0 .$$

Eigenschaften dieser Lösungen:

1. Für festes  $\tilde{t}$  haben  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf den **Hyperebenen**  $t - \vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const.}$  überall den gleichen Wert (gleiche "Phase"). Hält man auch noch die Zeit  $t$  fest, so gilt dies entsprechend für die Ebenen  $\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{const.}$ .
2. Zum Zeitpunkt  $t + \tau$  hat man

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x} + c\vec{n}\tau, t + \tau) &= \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x} + c\vec{n}\tau, t + \tau) &= \vec{B}(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

d.h. die **Ebenen gleicher Phase bewegen sich mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten**  $\vec{n}c = \vec{c}$ : ebene "Welle" mit "Phasen"-Geschwindigkeit  $\vec{c}$ ,  $\|\vec{c}\| = c$ .

3. Die drei Vektoren  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  bilden für festes  $\vec{x}, t$  ein orthogonales Dreibein:  $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ ,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ .  **$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stehen aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$  senkrecht : transversale Wellen.**
4. Für die **Energiedichte** erhält man

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= w_{el} + w_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}^2, \quad \text{da } \vec{E}^2 = c^2 \vec{B}^2. \end{aligned}$$

Der **Poynting-Vektor** ist:

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}^2 c \vec{n} = w(\vec{x}, t) c \vec{n}.\end{aligned}$$

D.h. die Energie fließt in die  $\vec{n}$ -Richtung mit "Geschwindigkeit"  $c$ . Schließlich ergibt die **Impulsdichte** (S. 77)

$$\vec{p}_{em}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{c} \vec{E}^2(\vec{x}, t) \vec{n} = \frac{1}{c} w(\vec{x}, t) \vec{n}$$

den "**Strahlungsdruck**" bei Lichtabsorption !

5. Da der D'Alembert-Operator  $\square$  nur die *zweiten* Ableitungen von  $t$  und  $x_i$  enthält, so ist auch  $\vec{A} = \vec{b}(t + \vec{n} \cdot \vec{x}/c)$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$  eine Lösung.

Man bezeichnet die Lösungen  $\vec{a}(t - \vec{n} \cdot \vec{x})$  als *rechtslaufende* und die Lösungen  $\vec{b}(t + \vec{n} \cdot \vec{x})$  als *linkslaufende* Wellen.

### 12.1.2 Monochromatische ebene Wellen

Jede Lösung  $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\varepsilon}(\vec{x}) \sin(\omega t + \varphi_0)$ ,  $\varphi_0 = \text{const.}$ , der Maxwell'schen Gleichungen im materiefreien Raum **heißt monochromatisch**.

$\omega$ : Kreisfrequenz und  $T = 2\pi/\omega$ : Periode der Schwingung.

**Monochromatische ebene Welle:**

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\varepsilon} \sin\left[\omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{c}\right)\right].$$

Definition:

$$\vec{k} = \frac{1}{c} \omega \vec{n} : \text{ "Wellenvektor" }.$$

Für festes  $t$  ist  $\vec{E}$  periodisch in  $\vec{x}$  mit der Periode  $\vec{k} \cdot \vec{x}_0 = 2\pi$ .

$$\lambda = 2\pi / \|\vec{k}\| : \text{ "Wellenlänge" }.$$

Transversalität:

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0.$$

Analog zum  $\sin(\dots)$  kann man auch  $\cos(\dots)$  oder eine Linearkombination nehmen. Rechnerisch ist es sehr bequem, die Beziehung  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  auszunutzen:  $\vec{\varepsilon}$  kann **komplexe** Komponenten haben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \Re[\vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}], \quad \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \Re\left[\frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}\right].\end{aligned}$$

Für  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  und  $\vec{\varepsilon} = e^{i\delta}(a, ib, 0)$ ,  $\delta, a, b$  reell, erhält man

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (a \cos(\omega t - kx_3 - \delta), b \sin(\omega t - kx_3 - \delta), 0),$$

d. h. der Vektor durchläuft mit wachsendem  $\omega t - kx_3$  eine Ellipse.

$a \cdot b < 0$ : rechts (zirkular) polarisierte Welle (schaut man in die negative  $\vec{n}$ -Richtung, so läuft  $\vec{E}$  mit  $t$  im Uhrzeigersinn um),

$a \cdot b > 0$ : links polarisierte Welle,

$a \cdot b = 0$ : linear polarisierte Welle,

**Die gesamte klassische Optik läßt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen herleiten**

"Licht" = elektromagnetische Welle.

### Zeitliche Mittelwerte :

In vielen Experimenten beobachtet man nur zeitliche Mittelwerte von Feldgrößen  $F(\vec{x}, t)$ :

$$\langle F(\vec{x}, t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} F(\vec{x}, t) dt.$$

Bei Größen mit der Periode  $T$  hat man

$$\langle F(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(\vec{x}, t) dt.$$

Für die obigen  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  erhält man

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle &= 0, & \langle \vec{B}(\vec{x}, t) \rangle &= 0 \\ \text{und } \langle w(\vec{x}, t) \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{\varepsilon}\|^2, & \|\vec{\varepsilon}\|^2 &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_k^* \varepsilon_k, & \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n} &= 0, \\ \langle \vec{S}(\vec{x}, t) \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{2} \|\vec{\varepsilon}\|^2 c \vec{n}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für das Berechnen zeitlicher Mittelwerte ist die folgende Beziehung hilfreich: Sind  $\vec{C}_1 = \vec{c}_1 e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{C}_2 = \vec{c}_2 e^{-i\omega t}$  zwei komplexe Vektoren, so gilt für die zeitlichen Mittelwerte

$$\begin{aligned} \langle \Re \vec{C}_1 \cdot \Re \vec{C}_2 \rangle &= \Re \frac{1}{2} (\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2^*) = \frac{1}{2} \Re (\vec{C}_1^* \cdot \vec{C}_2) \\ \langle \Re \vec{C}_1 \times \Re \vec{C}_2 \rangle &= \Re \frac{1}{2} (\vec{C}_1 \times \vec{C}_2^*). \end{aligned}$$

### 12.1.3 Wellengleichungen für die Felder

Mittels der Identität  $\text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$ , kann man aus  $\text{rot}\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$ ,  $\text{div}\vec{E} = 0$  und  $\text{rot}\vec{B} = \partial_t\vec{E}/c^2$  für  $\vec{E}$  die Wellengleichung

$$\boxed{\square\vec{E} = 0}$$

bekommen.

Die **Transversalität von  $\vec{E}$**  folgt aus  $\text{div}\vec{E} = 0$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \Re e[\vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}], \\ \text{div}(\vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}) &= i\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0.\end{aligned}$$

Analoge Gleichungen folgen für  $\vec{B}$ :

$$\boxed{\square\vec{B} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0.}$$

In den Anwendungen schreibt man meistens

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

und meint dann damit, daß physikalisch nur  $\Re e\vec{E}$  oder  $\Im m\vec{E}$  eine Bedeutung haben, da nur diese **reelle** Größen sind.

## 12.2 Wellenpakete, Fourier-Transformation und Gruppengeschwindigkeit

Wir haben bisher monochromatische Wellen betrachtet, bei denen nur eine Kreisfrequenz  $\omega$  als Funktion

$$\omega(\vec{k}) = c\sqrt{\vec{k}^2}$$

eines fest vorgegebenen Wellenvektors  $\vec{k}$  auftritt. Solche Wellen sind mathematische Idealisierungen, die sich experimentell nicht realisieren lassen (eine monochromatische Ebene Welle müßte über den gesamten 3-dimensionalen Raum ausgedehnt sein und in dieser Form auch erzeugt werden!), da bei der Erzeugung von Wellen immer mehrere  $\vec{k}$ -Vektoren eine Rolle spielen, wobei deren Beträge und Richtungen sich allerdings nur wenig zu unterscheiden brauchen.

Wir nehmen zunächst an, daß wir einen *diskreten* Satz von  $\vec{k}$ -Vektoren  $\vec{k}_\nu$  haben, zu denen die Frequenzen  $\omega_\nu = c\sqrt{\vec{k}_\nu^2}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$  gehören. Dann ist auch die Überlagerung

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \Re e\left[\sum_{\nu=1}^n \vec{\varepsilon}(\nu) e^{-i(\omega_\nu t - \vec{k}_\nu \cdot \vec{x})}\right], \quad \vec{k}_\nu \cdot \vec{\varepsilon}_\nu = 0,$$

eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Der Übergang zum Kontinuum ergibt

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \Re e \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\varepsilon}(\vec{k}) e^{-i[\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x}]} d^3 k \right\}, \quad \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{k}) = 0, \quad \omega(\vec{k}) = c\sqrt{\vec{k}^2}.$$

(„Spektralzerlegung“ von  $\vec{E}$  nach  $\vec{k}$ -Vektoren). Einige Eigenschaften solcher „Wellenpakete“ sollen hier kurz erläutert werden:

Es sei  $f(t, \vec{x})$  eine Lösung der Wellengleichung, d.h.

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) f(t, \vec{x}) = 0.$$

Die einfachsten Lösungen sind die ebenen Wellen

$$e_k(t, \vec{x}) = e^{-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

wobei

$$\omega^2/c^2 = \vec{k}^2, \quad \text{d.h.} \quad \omega = \pm c(\vec{k}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus anschaulichen Gründen betrachten wir zunächst nur positive Frequenzen  $\omega > 0$ . Ersetzt man  $\vec{k}$  durch  $-\vec{k}$ , so geht  $\omega$  in sich über, aber die Laufrichtung der Welle kehrt sich um. Mit  $e_k(t, \vec{x})$  ist auch  $e_{-k}(t, \vec{x})$  eine Lösung.

Ferner ist jede Überlagerung von ebenen Wellen eine Lösung der Wellengleichung:

$$f(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 k \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

wobei  $\omega(\vec{k}) = c(\vec{k}^2)^{\frac{1}{2}}$ . Das Integral existiert, falls

$$\left| \int d^3 k \tilde{f} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right| \leq \int d^3 k |\tilde{f}(\vec{k})| < \infty.$$

Die „Amplitude“  $\tilde{f}(\vec{k})$  ist ein Maß für das „Gewicht“, mit dem jeder Wellenvektor in der Welle vertreten ist.

**Falls  $\tilde{f}(\vec{k}) = a \delta(\vec{k} - \vec{k}_0)$ , so erhält man die monochromatische Welle zurück:**

$$\int d^3 k \delta(\vec{k} - \vec{k}_0) e^{-i\omega(\vec{k})t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} = e^{-i\omega(\vec{k}_0)t + i\vec{k}_0 \cdot \vec{x}}.$$

$f(t, \vec{x})$  existiert insbesondere dann, falls  $\tilde{f}(\vec{k})$  beliebig oft differenzierbar ist und im Unendlichen, d.h. für  $\|\vec{k}\| \rightarrow \infty$ , stärker als jede Potenz abfällt.

**Beispiel:**

$$\tilde{f}(\vec{k}) = A_0 e^{-a(\vec{k} - \vec{k}_0)^2}, \quad a > 0.$$

Hier hat  $\tilde{f}(\vec{k})$  sein Maximum bei  $\vec{k} = \vec{k}_0$ . Für Funktionen mit dem genannten Abfallverhalten - aber nicht nur für diese! - gilt das folgende wichtige Umkehr-

Theorem der Fourier-Transformation :

Falls

$$g(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \tilde{g}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \int d^3k |\tilde{g}(\vec{k})| < \infty,$$

und  $g(\vec{x})$  entsprechende Bedingungen wie  $\tilde{g}(\vec{k})$  erfüllt, so gilt

$$\tilde{g}(\vec{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3x g(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Ist  $f(t, \vec{x})$  als Lösung der Wellengleichung gegeben, so folgt daher

$$\tilde{f}(\vec{k}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3x f(t=0, \vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}},$$

da

$$f(t=0, \vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Es habe  $\tilde{f}(\vec{k})$  ein Maximum bei  $\vec{k} = \vec{k}_0$ . Entwickelt man nun  $\omega(\vec{k})$  um  $\vec{k} = \vec{k}_0$ , so erhält man

$$\omega(\vec{k}) = \underbrace{\omega(\vec{k}_0)}_{\omega_0} + \underbrace{\text{grad}_k \omega|_{\vec{k}=\vec{k}_0}}_{\equiv \text{grad} \omega_{|0}} (\vec{k} - \vec{k}_0) + \dots,$$

so daß

$$\begin{aligned} f(t, \vec{x}) &\approx (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k e^{-i[\omega_0 + \text{grad} \omega_{|0}(\vec{k} - \vec{k}_0)]t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i[k_0 \text{grad} \omega_{|0} - \omega_0]t} \int d^3k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i[\vec{x} - \text{grad} \omega_{|0} t] \cdot \vec{k}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$f(t, \vec{x}) \approx f(t=0, \vec{x} - \text{grad} \omega_{|0} t) e^{i[k_0 \cdot \text{grad} \omega_{|0} - \omega_0]t},$$

d.h., abgesehen von der Phase  $e^{i[k_0 \cdot \text{grad} \omega_{|0} - \omega_0]t}$ , hat sich die zur Zeit  $t=0$  vorhandene "Wellengruppe" mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}_g = \text{grad} \omega(\vec{k})$$

fortgepflanzt;  $\vec{v}_g$  heißt die "Gruppengeschwindigkeit" der Welle.

**Beispiel:** Bei Hohlleitern (s.S. 90) haben wir  $\omega = c(\vec{k}^2 + \gamma_{mn}^2)^{\frac{1}{2}}$ , so daß

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\omega},$$

und wir werden sehen, daß die **Gruppengeschwindigkeit mit der Energie-transport-Geschwindigkeit identisch ist.**

Die Funktion

$$g(\vec{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \tilde{g}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

ist genau dann reell,  
falls

$$\tilde{g}^*(-\vec{k}) = \tilde{g}(\vec{k})$$

gilt, da durch Substitution  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$

$$\int d^3k \tilde{g}^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \int d^3k \tilde{g}^*(-\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} .$$

folgt. Gilt  $\tilde{f}^*(-\vec{k}) = \tilde{f}(\vec{k})$ , so hat man für eine Lösung  $f(t, \vec{x})$  der Wellengleichung:

$$\begin{aligned} f^*(t, \vec{x}) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \tilde{f}^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ &= f(-t, \vec{x}) . \end{aligned}$$

## 12.3 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

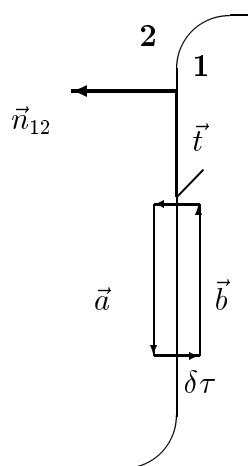
### 12.3.1 Randbedingungen für zeitabhängige elektromagnetische Felder

Um die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen in Hohlleitern zu diskutieren, müssen wir das Verhalten der zeitabhängigen Felder  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  an den Grenzflächen zu metallischen Leitern kennen. Dies folgt aus den Maxwell'schen Gleichungen selbst, falls man die **Existenz von Oberflächenladungen**  $\omega(\vec{x}, t)$  [Ladung/Fläche] **und Oberflächenströmen**

$$\vec{h}(\vec{x}, t) = \omega(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ [Ladung/Länge Zeit],}$$

$$\vec{x} \in \text{Grenzfläche ,}$$

berücksichtigt!



$$\vec{n}_{12}^2 = 1 ,$$

$$\vec{t}^2 = 1 ,$$

$\vec{t}$  : Tangentialvektor

$\vec{u} = \vec{n}_{12} \times \vec{t}$  : ebenfalls Tangentialvektor

$$\vec{a} \approx \vec{t} \delta s$$

$$\vec{b} \approx -\vec{t} \delta s .$$

Hier wird im folgenden die "kleine" Länge  $\delta s$  festgehalten, die transversale Länge  $\delta\tau$  jedoch beliebig klein gemacht. Wie in der Elektrostatik gilt zunächst

$$\boxed{\varepsilon_0(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\vec{n}_{12} = \omega.}$$

Für das kleine Rechteck in der Figur, mit der Fläche  $\Delta\vec{f} \approx \|\vec{a}\|\delta\tau\vec{u} = \delta s\delta\tau\vec{u}$  folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta\vec{f}} \vec{E} \cdot d\vec{x} &\approx -\vec{E}_1\vec{t}\delta s + \vec{E}_2\vec{t}\delta s + O(\delta\tau) \\ &= -\int_{\Delta\vec{f}} \partial_t\vec{B} \cdot d\vec{f} \approx -\partial_t\vec{B} \cdot \vec{u} \delta s\delta\tau. \end{aligned}$$

Im Limes  $\delta\tau \rightarrow 0$  ergibt dies, falls  $\partial_t\vec{B} \cdot \vec{u}$  nicht singulär wird, wegen  $\delta s \neq 0$ :

$$\boxed{(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0 ;}$$

d. h. die Tangential-Komponenten von  $\vec{E}$  sind stetig. Da  $\vec{t}$  ein beliebiger Tangentialvektor in der Ebene senkrecht zu  $\vec{n}_{12}$  ist, so kann man die obige Bedingung auch so formulieren:

$$\boxed{\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0.}$$

Da es keine magnetischen (Flächen-) Ladungen gibt, so folgt für die Normalkomponenten von  $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0.}$$

Für die Tangentialkomponenten von  $\vec{B}$  erhalten wir schießlich:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta\vec{f}} \vec{B} d\vec{x} &\approx -\vec{B}_1 \cdot \vec{t}\delta s + \vec{B}_2 \cdot \vec{t}\delta s + O(\delta\tau) = \mu_0 \int_{\Delta\vec{f}} \vec{j} \cdot d\vec{f} + \mu_0\varepsilon_0 \int_{\Delta\vec{f}} \partial_t\vec{E} \cdot d\vec{f} \\ &= \mu_0[\vec{j} \cdot \vec{u} \delta s\delta\tau + \varepsilon_0 \partial_t\vec{E} \cdot \vec{u} \delta s\delta\tau]. \end{aligned}$$

Im Limes  $\delta\tau \rightarrow 0$  geht  $\vec{j} \cdot \vec{u} \delta\tau$  gegen den Oberflächenstrom  $\vec{h} \cdot \vec{u}$ , d. h. wir bekommen bei nicht-singulärem  $\partial_t\vec{E}$  wegen  $\delta s \neq 0$ :

$$\vec{t} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{h} \cdot \vec{u}.$$

Da  $\vec{t} = \vec{u} \times \vec{n}_{12}$ , so folgt

$$(\vec{u} \times \vec{n}_{12}) \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{u} \cdot [\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)] = \mu_0 \vec{u} \cdot \vec{h},$$

und da  $\vec{u}$  ein beliebiger Einheitsvektor in der Tangentialebene ist, so erhalten wir schließlich

$$\boxed{\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{h},}$$

d. h., falls es Oberflächenströme gibt, macht die Tangentialkomponente von  $\vec{B}$  einen Sprung !

### 12.3.2 Wellen in metallischen Hohlleitern

Wir betrachten nun die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen in metallischen Hohlleitern. Die Leiter werden zunächst als ideal angesehen ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), d.h. im Innern des Metalls kann kein  $\vec{E}$ -Feld bestehen. Wegen der Kontinuität der Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  gilt daher

$$\boxed{\vec{E}_t = 0 \text{ an der (inneren) Leiteroberfläche.}}$$

Wegen  $\vec{E} = 0$  im Metall und  $\vec{j} = 0$  ist dort auch  $\vec{B} = 0$ . Da die Normalkomponente von  $\vec{B}$  stetig ist, gilt ferner

$$\boxed{\vec{B}_n = 0 \text{ an der (inneren) Leiteroberfläche.}}$$

Wegen auftretender Oberflächen-Ladungen und -Ströme verschwinden im allgemeinen  $\vec{E}_n$  und  $\vec{B}_t$  nicht !

Der gerade Hohlleiter mit rundem oder rechteckigem Querschnitt erstreckt sich längs der 3-Achse:



Die elektromagnetische Welle bewege sich längs der  $x_3$ -Achse, d. h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  haben die Form

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{f}(x_1, x_2)e^{-i(\omega t - kx_3)}, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{g}(x_1, x_2)e^{-i(\omega t - kx_3)}.\end{aligned}$$

Für das Folgende ist eine spezielle Notation nützlich:

$$\begin{aligned}\vec{x}_- &= (x_1, x_2), \\ \vec{f}_- &= (f_1, f_2) \quad , \quad \vec{g}_- = (g_1, g_2), \\ \Delta_- &= \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad , \quad \text{grad}_- = (\partial_1, \partial_2), \\ \text{div}_- \vec{f}_- &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2.\end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned}\text{rot} \vec{E} &= (\partial_2 f_3 - ik f_2, -\partial_1 f_3 + ik f_1, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)e^{-i(\omega t - kx_3)}, \\ \text{rot} \vec{B} &= (\partial_2 g_3 - ik g_2, -\partial_1 g_3 + ik g_1, \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)e^{-i(\omega t - kx_3)}.\end{aligned}$$

Aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \partial_2 f_3 - ik f_2 &= i\omega g_1 \quad , \quad \partial_2 g_3 - ik g_2 = -i\frac{\omega}{c^2} f_1 \quad , \\ ik f_1 - \partial_1 f_3 &= i\omega g_2 \quad , \quad ik g_1 - \partial_1 g_3 = -i\frac{\omega}{c^2} f_2 \quad , \end{aligned}$$

oder, da  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ , bzw.  $-\vec{e}_1 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2$ ,

$$\begin{aligned} \omega \vec{g}_- &= k \vec{e}_3 \times \vec{f}_- + i\vec{e}_3 \times \operatorname{grad}_- f_3 \quad , \\ \frac{\omega}{c^2} \vec{f}_- &= -k \vec{e}_3 \times \vec{g}_- - i\vec{e}_3 \times \operatorname{grad}_- g_3 \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen von  $\vec{g}_-$  der 1. Gleichung in die zweite und von  $\vec{f}_-$  der 2. Gleichung in die erste ergibt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{f}_- &= ik \operatorname{grad}_- f_3 - i\vec{e}_3 \times \operatorname{grad}_- g_3 \quad , \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{g}_- &= ik \operatorname{grad}_- g_3 + i\frac{\omega}{c^2} \vec{e}_3 \times \operatorname{grad}_- f_3 \quad . \end{aligned}$$

Man sieht, daß  $\vec{f}_-$  und  $\vec{g}_-$  bestimmt sind, falls  $f_3 \neq 0$  oder (und)  $g_3 \neq 0$ . Falls  $g_3 = 0$ ,  $f_3 \neq 0$ , spricht man von **transversalen magnetischen (TM) Wellen**, falls  $g_3 \neq 0$ ,  $f_3 = 0$ , von **transversalen elektrischen (TE) Wellen**.

### 1. TM-Wellen:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{f}_- = ik \operatorname{grad}_- f_3$$

und

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{g}_- = i\frac{\omega}{c^2} \vec{e}_3 \times \operatorname{grad}_- f_3 = \frac{\omega}{c^2 k} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{e}_3 \times \vec{f}_- \quad ,$$

d.h.

$$\vec{g}_- = \frac{\omega}{c^2 k} \vec{e}_3 \times \vec{f}_- \quad .$$

Da

$$E_3 = f_3 e^{-i(\omega t - kx_3)}$$

der Wellengleichung

$$\square E_3 = \left[ \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) f_3 - \Delta_- f_3 \right] e^{-i(\omega t - kx_3)} = 0$$

genügen muß, so folgt für  $f_3$

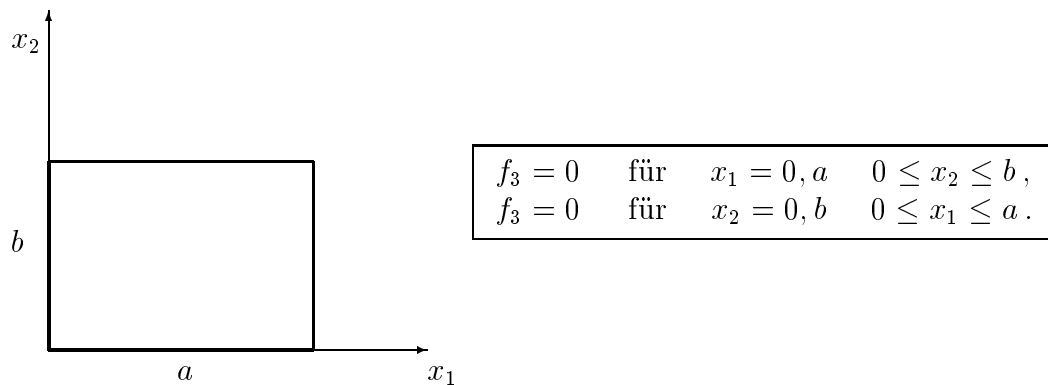
$$\Delta_- f_3 + \gamma^2 f_3 = 0, \quad \gamma^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k^2.$$

Die Randbedingungen  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  und  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  bedeuten hier

$$f_3|_{\text{Oberfläche}} = 0, \quad g_3 = 0 \text{ überall.}$$

Um die Gleichung  $(\Delta_- + \gamma^2)f_3 = 0$  unter der Randbedingung  $f_3|_{\text{Oberfläche}} = 0$  lösen zu können, müssen wir den Querschnitt des Hohlleiters spezifizieren.

**Beispiel:** rechteckiger Querschnitt.



Jedes Produkt aus  $\sin \gamma_1 x_1$  bzw.  $\cos \gamma_1 x_1$  mit  $\sin \gamma_2 x_2$  bzw.  $\cos \gamma_2 x_2$  ist eine Lösung von  $(\Delta_- + \gamma^2)f_3 = 0$ , falls  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma^2$ , aber nur

$$f_3 = A \sin \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2$$

erfüllt die Randbedingungen, falls

$$\gamma_1 = \frac{n\pi}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{m\pi}{b}; \quad m, n : \text{ganze Zahlen.}$$

Also ist

$$\begin{aligned} E_3 &= A \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right) e^{-i(\omega t - kx_3)}, \\ \frac{\omega^2}{c^2} &= k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2; \quad m, n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Da  $k^2 \geq 0$ , so muß die Frequenz  $\omega$  bei vorgegebenen  $n$  und  $m$  ein kritisches Minimum

$$\omega_{kr} = c \gamma_{mn}, \quad \gamma_{mn} = \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

überschreiten, damit eine entsprechende Welle auftreten kann.

Das Zahlenpaar  $(n, m)$  charakterisiert die "Mode" des (transversalen) elektromagnetischen Feldes.

Die Maxwellsche Gleichung  $\operatorname{div} \vec{E} = 0^1$  ist automatisch erfüllt: aus

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{f}_- = ik \operatorname{grad}_- f_3$$

folgt

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \operatorname{div}_- \vec{f}_- = ik \Delta_- f_3 = -ik \gamma^2 f_3 ,$$

oder:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_- \vec{f}_- + ik f_3 &= 0 , \quad \text{d.h.} \\ \operatorname{div}[\vec{f}_- e^{-i(\omega t - kx_3)}] &= 0 . \end{aligned}$$

Als Mittelwert  $\langle \vec{S} \rangle$  für den Poynting-Vektor erhalten wir mittels der Formeln von S. 81

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \Re e[(\vec{f}_- + f_3 \vec{e}_3) \times \vec{g}_-^*] \\ &= \frac{\omega}{2\mu_0 c^2 k} \Re e[(\vec{f}_-^* \cdot \vec{f}_-) \vec{e}_3 - f_3 \vec{f}_-^*] , \end{aligned}$$

d.h.

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 k \omega}{2\gamma^4} \Re e(|\operatorname{grad}_- f_3|^2 \vec{e}_3 + i \frac{\gamma^2}{k} f_3 \operatorname{grad}_- f_3^*) .$$

Ist  $F^\dagger$  der Querschnitt des Hohlleiters, so fließt durch ihn im zeitlichen Mittel in  $\vec{e}_3$ -Richtung die Energie

$$s = \int_{F^\dagger} \langle \vec{S} \rangle \cdot \vec{e}_3 \|d\vec{f}\| = \frac{\varepsilon_0 k \omega}{\gamma^4} \int_{F^\dagger} |\operatorname{grad}_- f_3|^2 dx_1 dx_2 .$$

Da

$$(\operatorname{grad}_- \varphi_1 \cdot \operatorname{grad}_- \varphi_2) = \operatorname{div}_- (\varphi_1 \operatorname{grad}_- \varphi_2) - \varphi_1 \Delta_- \varphi_2 ,$$

so folgt aus dem Gaußschen Satz in der Ebene wegen  $f_2 = 0$  auf  $\partial F^\dagger$  und  $\Delta_- f_3 = -\gamma^2 f_3$ :

$$s = \frac{\varepsilon_0 k \omega}{2\gamma^2} \int_{F^\dagger} f_3^* f_3 dx_1 dx_2 .$$

Für den zeitlichen Mittelwert der Energiedichte erhalten wir analog

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \Re e(\vec{f}_-^* \cdot \vec{f}_- + f_3^* f_3) + \frac{1}{4\mu_0} \Re e(\vec{g}_-^* \cdot \vec{g}_-) ;$$

<sup>1</sup>Analog zeigt man, daß  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

und da

$$\vec{g}_- = \frac{\omega}{c^2 k} \vec{e}_3 \times \vec{f}_-,$$

so ist

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{1}{\gamma^4} \left( \frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) |\text{grad}_- f_3|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_0 f_3^* f_3.$$

In dem Hohlleiter befindet sich dann pro Längeneinheit im zeitlichen Mittel die Energie

$$u = \int_{F^\uparrow} \langle w \rangle dx_1 dx_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \int_{F^\uparrow} dx_1 dx_2 \left[ \frac{1}{\gamma^4} \left( \frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) |\text{grad}_- f_3|^2 + f_3^* f_3 \right].$$

Die analoge Umformung des Integrals wie oben ergibt

$$u = \frac{\varepsilon_0 \omega^2}{2 \omega_{kr}^2} \int_{F^\uparrow} f_3^* f_3 \|d\vec{f}\|.$$

Da  $ck = (\omega^2 - \omega_{kr}^2)^{\frac{1}{2}}$ , so ergibt sich für das Verhältnis  $s/u$

$$\frac{s}{u} = \frac{c^2 k}{\omega} = c \left( 1 - \frac{\omega_{kr}^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} = v_g,$$

d.h. die Energie wird mit der **Gruppengeschwindigkeit**  $v_g$  (s.S. 84) durch den Hohlleiter transportiert,  $0 \leq v_g \leq c$ .

## 2. TE-Wellen

Hier geht man ganz analog wie bei TM-Wellen vor. Allerdings ist die Randbedingung für  $g_3$  an der Oberfläche des Leiters anders:

Multipliziert man die Gleichung

$$\frac{\omega}{c^2} \vec{f}_- = -k \vec{e}_3 \times \vec{g}_- - i \vec{e}_3 \times \text{grad}_- g_3$$

von S. 88 vektorieell mit  $\vec{e}_3$ , so erhält man

$$\frac{\omega}{c^2} \vec{e}_3 \times \vec{f}_- = k \vec{g}_- + i \text{grad}_- g_3.$$

Sei  $\vec{n}$  Normalenvektor an die innere Leiteroberfläche. Da an der Oberfläche  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ , d.h.  $\vec{n} \times \vec{f}_- = 0$  und  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ , d.h.  $\vec{n} \cdot \vec{g}_- = 0$ , so folgt aus der obigen Gleichung

$$\vec{n} \cdot \text{grad}_- g_3 = 0 \quad \text{an der (inneren) Oberfläche des Leiters.}$$

Die Komponente  $g_3$  genügt ebenfalls der Gleichung

$$\Delta_- g_3 + \gamma^2 g_3 = 0.$$

Für einen rechteckigen Leiterquerschnitt (s.S. 89) lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_1 g_3 &= 0 \text{ für } x_1 = 0, a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \\ \partial_2 g_3 &= 0 \text{ für } x_2 = 0, a, \quad 0 \leq x_1 \leq a. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß von den Lösungen von  $\Delta_- g_3 + \gamma^2 g_3 = 0$  nur die folgenden in Frage kommen:

$$g_3 = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right), \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Hier sind auch die Moden  $(0, 1), (1, 0)$  möglich.

### 3. TME-Wellen

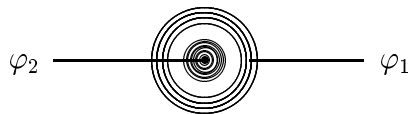
Man kann fragen, ob es auch rein transversale Wellen in Hohlleitern geben kann ( $f_3 = 0, g_3 = 0$ ). Aus den Gleichungen auf S. 88 folgt dann zunächst  $\omega^2/c^2 = k^2$ , wie bei den ebenen Wellen. Aus  $(\text{rot } \vec{E})_3 = 0$  ergibt sich

$$\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0, \quad \text{d.h.} \quad \vec{f}_- = -\text{grad}_- \varphi,$$

da außerdem  $\text{div } \vec{f}_- = 0$ , so haben wir ein **2-dimensionales Potentialproblem**:

$$\Delta_- \varphi = 0.$$

Es ist  $\vec{E} = 0$  im Metall,  $\varphi = \text{const.}$  an der Leiteroberfläche. Besteht daher der Hohlleiter aus einem einfach zusammenhängenden Hohlraum, so ist  $\vec{E} = 0$  im Innern, d.h. es gibt keine TME-Wellen.



Ist dagegen der Hohlraum **nicht einfachzusammenhängend**, wie beim Koaxialkabel, so sind TME-Wellen möglich!

Hier ist  $\omega_{kr} = 0!$

# Kapitel 13

## Elektromagnetische Felder von vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilungen

### 13.1 Greensche Funktionen der Wellengleichung

Die inhomogene Wellengleichung

$$\square f(t, \vec{x}) = q(t, \vec{x}) ,$$

wobei  $q(t, \vec{x})$  eine vorgegebene Funktion ist, die "Quellen" von Wellen beschreibt, läßt sich formal sofort lösen, wenn man eine **Greensche Funktion**  $D(t - \tilde{t}; \vec{x} - \vec{y})$  des Wellenoperators  $\square$  kennt. Diese ist definiert durch die Gleichung

$$\square D(t - \tilde{t}; \vec{x} - \vec{y}) = \delta(t - \tilde{t}) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

**und geeignete Randbedingungen**, z.B., daß eine zur Zeit  $\tilde{t}$  am Orte  $\vec{y}$  erzeugte Welle erst zu einem späteren Zeitpunkt  $t > \tilde{t}$  am Orte  $\vec{x}$  eintreffen kann !

Kennt man  $D$ , so ist

$$f(t, \vec{x}) = \int d\tilde{t} d^3y D(t - \tilde{t}; \vec{x} - \vec{y}) q(\tilde{t}, \vec{y})$$

Lösung der inhomogenen Gleichung, da

$$\square f = \int d\tilde{t} d^3y \delta(t - \tilde{t}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) q(\tilde{t}, \vec{y}) = q(t, \vec{x}) .$$

$D(t - \tilde{t}; \vec{x} - \vec{y})$  läßt sich am einfachsten mittels Fourier-Transformation berechnen. Hierzu benötigen wir die Fourier-Transformierte der  $\delta$ -"Funktion" (s.S. 13–15).

Es sei  $T(x)$  eine "**verallgemeinerte**" **Funktion** wie das  $\delta$ -Funktional, die zunächst 1-dimensional definiert ist, und  $\chi(x)$  eine Testfunktion mit der Fourier-Darstellung

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int dk \tilde{\chi}(k) e^{ikx} ,$$

dann gilt (formal)

$$\begin{aligned} T[\chi] &= \int dx T(x) \chi(x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx T(x) \int dk \tilde{\chi}(k) e^{ikx} \\ &= \int dk [(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx T(x) e^{ikx}] \tilde{\chi}(k), \quad \text{d.h.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[\chi] &= \int dk \tilde{T}(-k) \tilde{\chi}(k), \\ \tilde{T}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int dx e^{-ikx} T(x). \end{aligned}$$

Da

$$\int dx \delta(x) \chi(x) = \chi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int dk \tilde{\chi}(k),$$

so sieht man, daß

$$\tilde{\delta}(-k) = \tilde{\delta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Also ist

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx}.$$

Setzt man  $ct = x_0$ ,  $c\vec{t} = y_0$ ,  $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ ,  $z_0 = x_0 - y_0$ , und führt man die Fourier-Transformierten

$$\begin{aligned} D(z^0, \vec{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_0 d^3k \tilde{D}(k_0, \vec{k}) e^{-i(k_0 z_0 - \vec{k} \cdot \vec{z})}, \\ \delta(z^0) \delta(\vec{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk_0 d^3k e^{-i(k_0 z_0 - \vec{k} \cdot \vec{z})} \end{aligned}$$

ein, so erhält man für  $\tilde{D}(k_0, \vec{k})$  die Gleichung

$$-(k_0^2 - \vec{k}^2) \tilde{D}(k_0, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}.$$

D.h.  $\tilde{D}$  hat Singularitäten (Pole) bei  $k_0 = \pm k$ ,  $k \equiv \|\vec{k}\|$ .

Das Integral

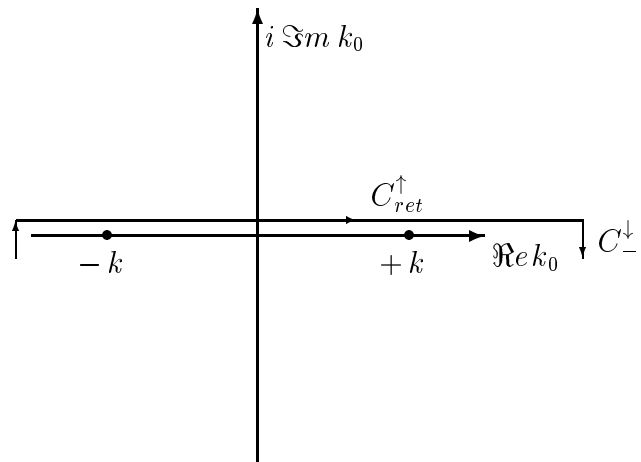
$$D(z^0, \vec{z}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - k^2}$$

ist also genauer zu definieren. Dies geschieht mit Hilfe des Residuensatzes in der komplexen  $k_0$ -Ebene. Da

$$\frac{1}{k_0^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \left( \frac{1}{k_0 - k} - \frac{1}{k_0 + k} \right),$$

so hat man die Residuen der Pole bei  $k_0 = \pm k$ , zu bestimmen:

Der Residuensatz ist so anzuwenden, daß ein Integrationsweg längs der reellen Achse durch einen Halbkreis vom Radius  $R$  ergänzt wird, wobei der Beitrag des Halbkreises im Limes  $R \rightarrow \infty$  verschwindet.



Da

$$e^{-i z_0 (\Re k_0 + i \Im k_0)} = e^{-i z_0 \Re k_0} e^{z_0 \Im k_0},$$

so muß dieser Halbkreis für  $z_0 > 0$  in der unteren, für  $z_0 < 0$  in der oberen Halbebene verlaufen.

Die Auswahl des Weges längs der reellen Achse – an den Polen vorbei – hängt von den gewünschten Randbedingungen ab. Wählt man den oben gezeigten Weg  $C_{ret}^\uparrow$ , so liegt beim Schließen des Weges in der oberen Halbebene kein Pol, d.h. wir haben  $D = 0$  für  $z_0 < 0$ . Beim Schließen in der unteren Halbebene bekommen wir dagegen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \int_{C_{ret}^\uparrow} dk_0 \left( \frac{e^{-iz_0 k_0}}{k_0 - k} - \frac{e^{-iz_0 k_0}}{k_0 + k} \right) + \int_{C_-^\downarrow} dk_0 \left( \frac{e^{-iz_0 k_0}}{k_0 - k} - \frac{e^{-iz_0 k_0}}{k_0 + k} \right) \\ = -2\pi i \left[ \frac{1}{2k} (e^{-iz_0 k} - e^{iz_0 k}) \right] \\ = -\frac{2\pi}{k} \sin(kz_0), \quad z_0 > 0. \end{aligned}$$

Da  $\int_{C_-^\downarrow} dk_0 \dots = 0(e^{-z_0 R}) \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ , so erhalten wir für die sogenannte "retardierte" Greensche Funktion:

$$\begin{aligned} D_{ret}(z_0, \vec{z}) &= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} \frac{\sin(z_0 k)}{k}, \\ \text{wobei } \Theta(z_0) &= \begin{cases} 1 & \text{für } z_0 > 0 \\ 0 & \text{für } z_0 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Einführen von Polarkoordinaten für  $\vec{k}$  mit  $\vec{z}$  als 3-Richtung ergibt

$$D_{ret}(z_0, \vec{z}) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk d\varphi \sin \vartheta d\vartheta e^{ik \|\vec{z}\| \cos \vartheta} \frac{\sin(z_0 k)}{k}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk \sin(z_0 k) \int_{-1}^{+1} du e^{ik \|\vec{z}\| u} \\
 &= \frac{\Theta(z_0)}{2\pi^2 \|\vec{z}\|} \int_0^\infty dk \sin(z_0 k) \sin(k \|\vec{z}\|) .
 \end{aligned}$$

Mittels  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$  wird daraus

$$\begin{aligned}
 D_{ret}(z_0, \vec{z}) &= \frac{\Theta(z_0)}{8\pi^2 \|\vec{z}\|} \int_0^\infty dk [e^{i(z_0 - \|\vec{z}\|)k} + e^{-i(z_0 - \|\vec{z}\|)k} \\
 &\quad - e^{i(z_0 + \|\vec{z}\|)k} - e^{-i(z_0 + \|\vec{z}\|)k}] \\
 &= \frac{\Theta(z_0)}{8\pi^2 \|\vec{z}\|} \int_{-\infty}^\infty dk [e^{i(z_0 - \|\vec{z}\|)k} - e^{-i(z_0 + \|\vec{z}\|)k}] .
 \end{aligned}$$

Die beiden Integrale ergeben  $\delta$ -Funktionen

$$2\pi \delta(z_0 - \|\vec{z}\|) \quad \text{und} \quad 2\pi \delta(z_0 + \|\vec{z}\|) ,$$

von denen die letzte verschwindet, da  $z_0 > 0$ ,  $\|\vec{z}\| > 0$ .

Somit erhalten wir schließlich

$$D_{ret}(x_0 - y_0, \vec{x} - \vec{y}) = \frac{\Theta(x_0 - y_0)}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|} \delta(x_0 - y_0 - \|\vec{x} - \vec{y}\|) .$$

**Physikalische Interpretation:**

Die "momentane, punktförmige Erregung" (Quelle)  $\delta(t - \tilde{t}) \delta(\vec{x} - \vec{y})$  zur Zeit  $\tilde{t}$  am Orte  $\vec{y}$  erzeugt am Orte  $\vec{x}$  zur Zeit  $t = \frac{1}{c} \|\vec{x} - \vec{y}\| + \tilde{t}$  eine "Welle"  $D_{ret}$ , die wie  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^{-1}$  abfällt.

Bei räumlich und zeitlich ausgedehnter Quelle  $q(t, \vec{x})$  bekommen wir als **retardierte Lösung:**

$$\begin{aligned}
 f_{ret}(t, \vec{x}) &= \int dy_0 d^3y D_{ret}(x_0 - y_0, \vec{x} - \vec{y}) q(y_0, \vec{y}) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{q(\tilde{t} = t - \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{c}, \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} .
 \end{aligned}$$

Die **allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung** ist dann

$$f(t, \vec{x}) = f_0(t, \vec{x}) + f_{ret}(t, \vec{x}) ,$$

wobei  $\square f_0(t, \vec{x}) = 0$ .

$f_0(t, \vec{x})$  läßt sich anschaulich folgendermaßen interpretieren:

$q(\tilde{t}, \vec{y})$  werde erst für  $\tilde{t} \geq -T$ ,  $T \gg 0$ , zu großen negativen Zeiten angeschaltet, so

daß  $f_{ret}(t, \vec{x}) = 0$  für  $-T > t$ .  $f_0$  beschreibt dann die sogenannte "einlaufende" Welle, also

$$\begin{aligned} f(t, \vec{x}) &= f_{ein}(t, \vec{x}) + f_{ret}(t, \vec{x}) , \\ \square f_{ein} &= 0 \quad , \quad \square f_{ret} = q(t, \vec{x}) . \end{aligned}$$

### Avancierte Lösungen:

Wählen wir oben auf S. 95 in der komplexen  $k_0$ -Ebene statt  $C_{ret}^\dagger$  einen dazu parallelen Weg  $C_{av}^\dagger$ , der **unterhalb** der beiden Pole verläuft, so bekommen wir völlig analog die sogenannte "avancierte" Greensche Funktion

$$D_{av}(x_0 - y_0, \vec{x} - \vec{y}) = \frac{\Theta[-(x_0 - y_0)]}{4\pi\|\vec{x} - \vec{y}\|} \delta(x_0 - y_0 + \|\vec{x} - \vec{y}\|) ,$$

d.h.  $D_{av} = 0$  für  $x_0 - y_0 > 0$  und für  $y_0 \neq x_0 + \|\vec{x} - \vec{y}\|$ .

Man erhält  $D_{av}$  offenbar aus  $D_{ret}$ , indem man dort alle Zeitkoordinaten durch ihre negativen Werte ersetzt.

Heuristische Interpretation der avancierten Lösungen: **an die Stelle der Abstrahlung durch eine Antenne tritt der zeitlich umgekehrte Vorgang des Empfanges mittels einer Antenne!**

Bei gegebenem  $q(t, \vec{x})$  erhalten wir die **avancierte** Lösung

$$f_{av}(t, \vec{x}) = \int dy_0 d^3y D_{av}(x_0 - y_0, \vec{x} - \vec{y}) q(y_0, \vec{y}) ,$$

und die allgemeine Lösung  $f(t, \vec{x})$  ist jetzt gegeben durch

$$f(t, \vec{x}) = f_{aus}(t, \vec{x}) + f_{av}(t, \vec{x}) , \quad \square f_{aus} = 0 .$$

Die homogene Lösung  $f_{aus}(t, \vec{x})$  hat folgende Interpretation:

Es sei  $q(\tilde{t}, \vec{y}) = 0$  für  $\tilde{t} > T \gg 0$ , d.h.  $f_{av} = 0$  für  $t > T$  und es bleibt nur die "auslaufende" Welle  $f_{aus}(t, \vec{x})$  übrig.

Die Differenz  $f_{aus} - f_{ein}$  beschreibt das "**Strahlungsfeld**", das von den Quellen zusätzlich zu dem einlaufenden Feld erzeugt wurde:

$$\begin{aligned} f_{Str.}(t, \vec{x}) &= f_{aus}(t, \vec{x}) - f_{ein}(t, \vec{x}) \\ &= \int dy_0 d^3y D(x_0 - y_0, \vec{x} - \vec{y}) q(y_0, \vec{y}) , \\ D(z_0, \vec{z}) &= D_{ret}(z_0, \vec{z}) - D_{av}(z_0, \vec{z}) , \end{aligned}$$

wobei  $\square D = 0$ .

## 13.2 Potentiale und Felder von Ladungen und Strömen

Sind die Ladungs- und Stromdichten  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  vorgegeben, so sind die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  nach S. 70 in der Lorentz-Eichung aus den Gleichungen

$$\square \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

zu bestimmen. Nach Abschnitt 11.1 bekommen wir die retardierten Lösungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{ret}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int d\tilde{t} d^3y D_{ret}(t - \tilde{t}, \vec{x} - \vec{y}) \rho(\tilde{t}, \vec{y}), \\ D_{ret} &= \frac{\Theta(t - \tilde{t})}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\|} \delta\left(t - \tilde{t} - \frac{1}{c} \|\vec{x} - \vec{y}\|\right), \end{aligned}$$

so daß

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(t - \|\vec{x} - \vec{y}\|/c, \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.$$

Ebenso gilt natürlich

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \mu_0 \int d\tilde{t} d^3y D_{ret}(t - \tilde{t}, \vec{x} - \vec{y}) \vec{j}(\tilde{t}, \vec{y}).$$

In den folgenden Abschnitten werden hierzu einige Beispiele diskutiert.

### 13.2.1 Schwingender elektrischer Dipol

Das Potential eines **zeitunabhängigen** Dipols  $\vec{p}$  war gegeben durch (s.S. 36):

$$\begin{aligned} \varphi_{dip}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{div}_x \left( \frac{\vec{p}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \operatorname{grad}_x \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{y}$  den Ort angibt, an dem der "punktförmige" Dipol lokalisiert ist. Da  $\Delta\varphi = -\rho(\vec{x})/\varepsilon_0$  in der Elektrostatik, und  $\Delta_x \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{y})$ , so gehört zu dem

statischen Dipolpotential die Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{dip}(\vec{x}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{dip}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div}_x [\vec{p} \cdot \delta(\vec{x} - \vec{y})] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \operatorname{grad}_x [\delta(\vec{x} - \vec{y})]. \end{aligned}$$

Die Ableitungen  $\partial_j \delta(\vec{x} - \vec{y})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sind folgendermaßen zu interpretieren:

Es sei  $\chi(\vec{x})$  eine 1-mal stetig differenzierbare Testfunktion, die außerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  verschwindet. Durch (formale) partielle Integration erhält man

$$\int_{\vec{a} \in G} d^3x \chi(\vec{x}) \partial_j \delta(\vec{x} - \vec{a}) = \int_G d^3x \partial_j [\chi(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{a})] - \int_G d^3x \partial_j \chi(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{a}).$$

Ist nun  $\vec{a} \in G$ , aber  $\vec{a} \notin \partial G$ , und führt man im 1. Term auf der rechten Seite die Integration über  $x_j$  aus, so verschwindet dieser Term, da  $\delta(\vec{x} - \vec{a}) = 0$  für den Integrationsbereich des bleibenden 2-fachen Integrals; bzw. wir können  $\chi(\vec{x})$  so wählen, daß  $\chi(\vec{x}) = 0$  auf  $\partial G$ . Damit haben wir für die Ableitungen des  $\delta$ -Funktional:

$$\begin{aligned} (\partial_j \delta_{\vec{a}}) [\chi] &= \int d^3x \chi(\vec{x}) \partial_j \delta(\vec{x} - \vec{a}) \\ &= -\delta_{\vec{a}} [\partial_j \chi] \\ &= -\partial_j \chi(\vec{a}). \end{aligned}$$

Der Dipol  $\vec{p}$  nun **zeitabhängig**:  $\vec{p} = \vec{p}(t)$ . Er befinde sich am Orte  $\vec{y} = 0$ . Dann haben wir die Ladungsdichte

$$\rho_{dip}(t, \vec{x}) = -\operatorname{div} [\vec{p}(t) \delta(\vec{x})].$$

Die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$  ist erfüllt, falls

$$\vec{j}_{dip}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{p}}(t) \delta(\vec{x}).$$

Im Folgenden wird der Index "dip" fortgelassen.

Damit erhalten wir für die zugehörigen retardierten Potentiale:

$$\begin{aligned} \varphi_{ret}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3y \frac{-\vec{p}(t - \|\vec{x} - \vec{y}\|/c)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \cdot \operatorname{grad}_y \delta(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3y \operatorname{div}_y \left[ \frac{\vec{p}(t - \|\vec{x} - \vec{y}\|/c)}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right] \delta(\vec{y}), \end{aligned}$$

und da

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\vec{x} - \vec{y}) = -\frac{\partial}{\partial y_j} \varphi(\vec{x} - \vec{y}),$$

so ist

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div}_x \frac{\vec{p}(\tilde{t})}{\|\vec{x}\|}, \quad \tilde{t} = t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|.$$

Ausdifferenzieren ergibt

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{x}}{c\|\vec{x}\|^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right), \quad \vec{p} = \vec{p}(\tilde{t}).$$

Der zweite Term hat dieselbe Form wie im statischen Fall und fällt wie  $\|\vec{x}\|^{-2}$  ab, während der erste neu ist und wie  $\|\vec{x}\|^{-1}$  abfällt! Der erste ist maßgeblich für die Wellenausbreitung!

Für das Vektorpotential  $\vec{A}_{ret}$  bekommt man unmittelbar

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi\|\vec{x}\|} \dot{\vec{p}}(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|).$$

Für die Felder  $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \partial_t \vec{A}$  und  $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{x})\vec{x}}{c^2\|\vec{x}\|^3} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2\|\vec{x}\|} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{x})\vec{x}}{c\|\vec{x}\|^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{\vec{p}}}{c\|\vec{x}\|^2} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{x}}{\|\vec{x}\|^5} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{x}\|^3} \right], \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{c\|\vec{x}\|^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right], \quad \vec{p} = \vec{p}(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|). \end{aligned}$$

Die verschiedenen Terme fallen wie  $\|\vec{x}\|^{-1}$ ,  $\|\vec{x}\|^{-2}$  oder  $\|\vec{x}\|^{-3}$  ab.

In der Umgebung von  $\|\vec{x}\| = 0$  (Nahzone!) überwiegen die Terme mit  $\|\vec{x}\|^{-3}$  für  $\vec{E}$  und  $\|\vec{x}\|^{-2}$  für  $\vec{B}$ .

**”Nahzone” :**

$$\begin{aligned} \vec{E}_{sta} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{x}}{\|\vec{x}\|^5} - \frac{\vec{p}}{\|\vec{x}\|^3} \right], \quad \vec{p} = \vec{p}(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|), \\ \vec{B}_{sta} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}. \end{aligned}$$

Für große Abstände sind die Terme proportional  $\|\vec{x}\|^{-1}$  maßgeblich.

**”Wellenzone”:**

$$\vec{E}_W(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 \varepsilon_0} \left[ \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{x}) \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{\|\vec{x}\|} \right],$$

$$\vec{B}_W(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2},$$

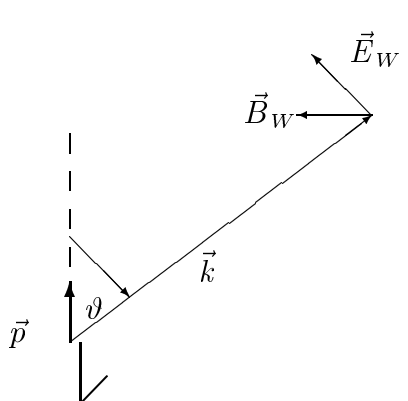
d.h.  $\vec{E}_W = c \vec{B}_W \times \vec{e}_r,$

$$\vec{B}_W = \frac{1}{c} \vec{e}_r \times \vec{E}_W, \quad \text{wobei} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Es ist

$$\vec{E}_W = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = 0 \quad (\text{s. Skizze}).$$

**Poynting-Vektor:**



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_W \times \vec{B}_W = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B}_W \times \vec{e}_r) \times \vec{B}_W$$

$$= \frac{c}{\mu_0} \vec{B}_W^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{x})^2}{\|\vec{x}\|^4} \vec{e}_r,$$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \frac{\ddot{\vec{p}}^2 \sin^2 \vartheta}{\|\vec{x}\|^2} \vec{e}_r,$$

mit  $\vec{p} = \vec{p}(t - \frac{1}{c} \|\vec{x}\|).$

Die Abstrahlung ist minimal für  $\vartheta = 0$ , maximal für  $\vartheta = 90^\circ$ .  
 Durch eine Kugeloberfläche vom Radius  $r$  strömt die Energie

$$s = \int \|\vec{S}\| \|\vec{x}\|^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{\vec{p}}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta.$$

Da

$$\begin{aligned} \int \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \frac{1}{4} \int (-\sin 3\vartheta + 3 \sin \vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{12} \cos 3\vartheta - \frac{3}{4} \cos \vartheta, \end{aligned}$$

so folgt

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3},$$

so daß

$$s(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}}^2,$$

mit

$$\vec{p} = \vec{p}(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|).$$

Falls speziell  $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin \omega t$  ist, so

$$\ddot{\vec{p}}(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|) = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin[\omega(t - \frac{1}{c}\|\vec{x}\|)],$$

und da  $\langle \sin^2[\omega(t - \|\vec{x}\|/c)] \rangle = \frac{1}{2}$  gilt, so folgt für die zeitlichen Mittelwerte

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{\mu_0 \vec{p}_0^2}{32\pi^2 c} \omega^4 \frac{\vec{e}_r}{\|\vec{x}\|^2} \sin^2 \vartheta, \\ \langle s \rangle &= \frac{\mu_0 \vec{p}_0^2}{12\pi c} \omega^4; \end{aligned}$$

d.h.  $\langle \vec{S} \rangle$  und  $\langle s \rangle$  sind proportional zu  $\omega^4$ , ebenso natürlich auch  $\vec{S}$  und  $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}_W^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_W^2$ .

### 13.2.2 Das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punktladung $q$

Ortsvektor von  $q$  sei  $\vec{z} = \vec{z}(\tilde{t})$ ; die zugehörigen Dichten sind dann

$$\begin{aligned} \rho(\vec{y}, \tilde{t}) &= q \delta[\vec{y} - \vec{z}(\tilde{t})], \\ \vec{j}(\vec{y}, \tilde{t}) &= q \dot{\vec{z}}(\tilde{t}) \delta[\vec{y} - \vec{z}(\tilde{t})]. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die retardierten Potentiale

$$\begin{aligned} \varphi_{ret}(t, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tilde{t} < t} d\tilde{t} d^3y \frac{\delta[t - \tilde{t} - \|\vec{x} - \vec{y}\|/c]}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \delta[\vec{y} - \vec{z}(\tilde{t})] \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\tilde{t} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|} \delta[\tilde{t} - t + \frac{1}{c}\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|] \end{aligned}$$

und analog:

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d\tilde{t} \frac{\dot{\vec{z}}(\tilde{t})}{\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|} \delta[\tilde{t} - t + \frac{1}{c}\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|].$$

Setzt man

$$\vec{r}(\tilde{t}) = \vec{x} - \vec{z}(\tilde{t}), \quad r = \|\vec{r}\|,$$

und

$$u(\tilde{t}) = \tilde{t} - t + \frac{1}{c} \|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|; \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{z}}}{c},$$

so erhält man

$$\frac{du}{d\tilde{t}} = 1 - \frac{1}{c} \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \dot{\vec{z}}(\tilde{t}) = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int du \frac{1}{\frac{du}{d\tilde{t}} r} \delta(u) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \frac{du}{d\tilde{t}}} \Big|_{u=0},$$

d.h.

$$\varphi_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r(\tilde{t}) (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c} r}$$

und analog

$$\vec{A}_{ret}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{c\vec{\beta}(\tilde{t})}{r(\tilde{t}) (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c} r}.$$

Dies sind die sogenannten Liénard-Wichert-Potentiale.

Die Feldstärken rechnet man am bequemsten so aus:

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi_{ret} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_x \int d\tilde{t} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|} \delta[\tilde{t} - t + \frac{1}{c} \|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\tilde{t} \left[ \frac{-\vec{r}}{r^3} \delta(u) + \frac{\vec{r}}{cr^2} \frac{d}{du} \delta(u) \right], \\ \partial_t \vec{A}_{ret} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \partial_t \int d\tilde{t} \frac{\vec{v}(\tilde{t})}{r(\tilde{t})} \delta[\tilde{t} - t + \frac{1}{c} r(\tilde{t})] \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d\tilde{t} \left[ -\frac{\vec{v}(\tilde{t})}{r(\tilde{t})} \frac{d}{du} \delta(u) \right], \quad \vec{v} \equiv \dot{\vec{z}}, \end{aligned}$$

so daß

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\tilde{t} \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \delta(u) - \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{v}}{c^2 r} \right) \frac{d\delta(u)}{du} \right].$$

Den letzten Term kann man umformen:

$$\begin{aligned} \int d\tilde{t} \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right) \frac{d\delta(u)}{du} &= \int du \frac{d\tilde{t}}{du} \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right) \frac{d\delta(u)}{du} \\ &= - \int du \left[ \frac{d}{du} \frac{d\tilde{t}}{du} \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right) \delta(u) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int du \left\{ \frac{d\tilde{t}}{du} \cdot \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{d\tilde{t}}{du} \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right) \right] \right\} \delta(u) \\
&= - \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \left( \frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\vec{\beta}}{cr} \right) \right]_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c}r}.
\end{aligned}$$

Somit bekommen wir für  $\vec{E}$ :

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})r^2} + \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \left( \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{cr} \right) \right] \right\}_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c}r}.$$

Analog ergibt sich für  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{c \vec{\beta} \times \vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})r^2} + \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \left( \frac{\vec{\beta} \times \vec{n}}{r} \right) \right] \right\}.$$

Da

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \vec{n}(\tilde{t}) = \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})}{\|\vec{x} - \vec{z}(\tilde{t})\|} \right] = \frac{1}{r} [(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}],$$

so kann man für  $\vec{E}$  auch schreiben

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \left\{ \frac{\vec{n}}{r^2} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}}{cr^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right. \\
&\quad \left. + \vec{n} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{1}{cr(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right] - \frac{1}{c} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right] \right\},
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \left\{ \frac{\vec{n}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} + \vec{n} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{1}{cr(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\vec{\beta}}{r^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} - \frac{1}{c} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man für  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{qc\mu_0}{4\pi(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \left\{ \frac{\vec{\beta} \times \vec{n}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})r^2} + \frac{1}{c} \left[ \frac{d}{d\tilde{t}} \left( \frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right) \times \vec{n} \right] \right\} \\
&= \frac{\vec{n}}{c} \times \vec{E}.
\end{aligned}$$

Da

$$\frac{d}{dt} [r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})] = c\vec{\beta}^2 - c\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - r\dot{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}},$$

so ergibt sich schließlich für  $\vec{E}$ :

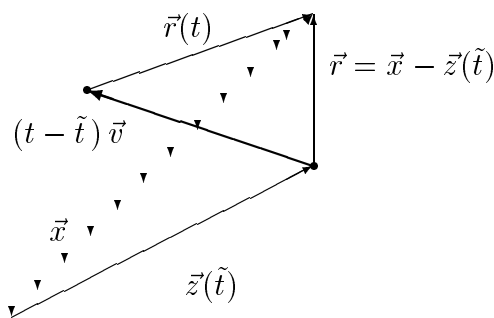
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \vec{\beta}^2)}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3 r^2} \right]_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c}r} + \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})\dot{\vec{\beta}}}{c(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3 r} \right]_{\tilde{t} = t - \frac{1}{c}r} \right\}.$$

Der Zähler im letzten Term kann als

$$\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]$$

geschrieben werden!

Falls das Teilchen sich mit **konstanter Geschwindigkeit**  $\vec{v} = c\vec{\beta}$  bewegt, so fällt der Term mit  $\dot{\vec{\beta}}$  weg und man hat (s. Skizze):



$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(\tilde{t}) - (t - \tilde{t}) \vec{v} \\ &= \vec{r}(\tilde{t}) - \frac{1}{c} r(\tilde{t}) \vec{v} \\ &= r(\tilde{t}) (\vec{n} - \vec{\beta}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \vec{r}^2(t) &= r^2(\tilde{t}) (1 - 2\vec{n} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2), \\ \vec{r}(t) \times \vec{\beta} &= r(\tilde{t}) \vec{n} \times \vec{\beta}, \\ [\vec{r}(t) \times \vec{\beta}]^2 &= r^2(\tilde{t}) [\vec{\beta}^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})^2]. \end{aligned}$$

Also ist

$$\vec{r}^2 - [\vec{r}(t) \times \vec{\beta}]^2 = r^2(\tilde{t}) [1 - (\vec{n} \cdot \vec{\beta})^2],$$

so daß

$$\vec{E}_{\dot{\beta}=0} \equiv \vec{E}^\beta(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}(1-\beta^2)}{[r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2]^{\frac{3}{2}}},$$

und

$$\vec{B}_{\dot{\beta}=0} \equiv \vec{B}^\beta(t, \vec{x}) = \frac{\vec{n}}{c} \times \vec{E}^\beta = \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E}^\beta,$$

da  $\vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta}) = \vec{\beta} \times (\vec{n} - \vec{\beta})$ !

Für  $\beta = 0$  erhält man das Coulomb-Feld.  $\vec{E}^\beta$  ist daher dessen Modifikation durch die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Für  $\vec{r} \parallel \vec{v}$  ergibt sich:

$$E_{\parallel}^\beta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)}{r^2}$$

auf der durch  $\vec{v}$  bestimmten Geraden.

Wenn  $\vec{r} \perp \vec{v}$ , so folgt dagegen

$$E_{\perp}^\beta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 (1-\beta^2)^{1/2}}.$$

Für  $\beta \rightarrow 1$  geht  $E_{\parallel}^\beta$  gegen Null, und  $E_{\perp}^\beta$  wird singulär, d.h.  $\vec{E}^\beta$  wird "transversal"! Folge der **Lorentz-Kontraktion**:

In der Mechanik hatten wir gesehen, daß die Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  einen schief-symmetrischen Lorentz-Tensor ( $F_{\mu\nu}$ ) bilden, der sich bei Lorentz-Transformationen  $\Lambda$  so transformiert (s. auch das nächste Kapitel):

$$\hat{F}^{\mu\nu}(\hat{t}, \hat{\vec{x}}) = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(t, \vec{x}).$$

Für eine **spezielle Lorentz-Transformation**  $\Lambda_s$  mit  $\vec{\beta} = \vec{u}/c$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\parallel}(\hat{t}, \hat{\vec{x}}) &= E_{\parallel}(t, \vec{x}), \quad \hat{B}_{\parallel}(\hat{t}, \hat{\vec{x}}) = B_{\parallel}(t, \vec{x}), \\ \hat{E}_{\perp}(\hat{t}, \hat{\vec{x}}) &= \gamma(u) [\vec{E}_{\perp}(t, \vec{x}) + \vec{u} \times \vec{B}_{\perp}(t, \vec{x})], \\ \hat{B}_{\perp}(\hat{t}, \hat{\vec{x}}) &= \gamma(u) [\vec{B}_{\perp}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{u}}{c^2} \times \vec{E}_{\perp}(t, \vec{x})], \\ \gamma(u) &= (1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2})^{-1/2}. \end{aligned}$$

Geht man von einer längs der  $x^1$ -Achse bewegten Ladung  $q$  aus, so liegt im bewegten System ein reines Coulomb-Feld vor. Insbesondere gilt auf der  $\hat{x}^1$ -Achse:

$$\hat{E}^1(\hat{\vec{x}} = (\hat{x}^1, 0, 0)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\hat{x}^1)^2} = E^1(\vec{x}).$$

Wegen der Lorentz-Kontraktion hat man

$$x^1 = \gamma^{-1} \hat{x}^1 \quad , \quad \hat{x}^1 = \gamma x^1 ,$$

so daß

$$E^1(\vec{x} = (x^1, 0, 0)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^1)^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right),$$

wie oben. Analoges gilt für  $\vec{E}_-$ !

Die **Strahlungsfelder**  $\vec{E}_{Str.}$ ,  $\vec{B}_{Str.}$  einer bewegten Punktladung sind durch die Terme von S. 105 gegeben, die die **Beschleunigung**  $\dot{\vec{\beta}}$  enthalten und im wesentlichen wie  $r^{-1}$  abfallen.

Die Formel ist wichtig für die Berechnung von Strahlungsverlusten der Elektronen oder Protonen in Beschleunigern sowie bei der Berechnung der Röntgen-Bremsstrahlung. Sie **”versagt”** bei der Beschreibung der Bewegung gebundener Elektronen in Atomen und Molekülen, die – klassisch gesehen – ständig beschleunigt werden und daher dauernd strahlen müßten!

# Kapitel 14

## Relativistische Formulierung der E-Dynamik

### 14.1 Grundbegriffe

Im folgenden werden einige Grundbegriffe wiederholt, die in der Vorlesung Mechanik (WS 97/98) in Kapitel 16 eingeführt wurden.

Vierervektor:

$$x \equiv (x^\mu) = (x^0 = ct, \vec{x})^T, \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3).$$

4dimensionales Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu && \text{(Einsteinsche Summenkonvention)} \\ &= x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \\ g &= (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lorentz-Transformationen:

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \\ y^\mu &\rightarrow \hat{y}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu, \\ \hat{x} \cdot \hat{y} &= x \cdot y, \\ \Rightarrow \quad \Lambda^T g \Lambda &= g, \quad \Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu). \end{aligned}$$

Definition:

$$\begin{aligned} (x_\mu) &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x}), \quad x_\mu = g^{\mu\nu} x^\nu, \\ &= \bar{x} = x^T \cdot g, \quad x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$x \rightarrow \Lambda x \quad , \quad \bar{x} \rightarrow \bar{x} \Lambda^{-1} ,$$

$$x : \text{kontravarianter} \quad , \quad \bar{x} : \text{kovarianter Vektor.}$$

Definition:

$$(g^{\mu\nu}) \equiv (g_{\mu\nu})^{-1} = (g_{\mu\nu}) ,$$

$$x^\mu \rightarrow x_\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Mittels  $g_{\mu\nu}$ , bzw.  $g^{\mu\nu}$  kann man jedem kontravarianten Vektor ( $a^\mu$ ) einen kovarianten Vektor ( $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ ) und jedem kovarianten Vektor ( $b_\mu$ ) einen kontravarianten ( $b^\mu = g^{\mu\nu} b_\nu$ ) zuordnen !

Lorentz-skalares Feld:  $f(x)$ , wobei  $\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$ .

Partielle Ableitung:

$$\hat{\partial}_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu} .$$

Da

$$\hat{\partial}_\mu \hat{f}(\hat{x}) = [\partial_\nu f(x)] \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu}$$

$$= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu f(x) ,$$

so transformiert sich  $\hat{\partial}_\mu$  wie ein kovarianter Vektor,  $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$  wie ein kontravarianter!

## 14.2 Anwendung auf die Elektrodynamik

Da die Ladungserhaltung in jedem Inertialsystem gilt, so muß aus  $\partial_t \rho + \text{div} \vec{j} = 0$

$$\hat{\partial}_t \hat{\rho}(\hat{x}) + \hat{\partial}_k \hat{j}^k(\hat{x}) = 0$$

folgen! Setzt man also

$$(j^\mu) = [c\rho, j^1(x), j^2(x), j^3(x)] ,$$

$$\hat{j}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x) ,$$

so folgt

$$\hat{\partial}_\mu \hat{j}^\mu(\hat{x}) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \Lambda^\mu{}_\kappa j^\kappa = \delta_\kappa^\nu \partial_\nu j^\kappa = \partial_\mu j^\mu(x) ,$$

und damit die Behauptung.

Nun ist  $\square = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 = \partial_\mu \partial^\mu$  ein **Lorentz-invarianter**

**Differentialoperator**,  $\hat{\square} = \square$  .

Da  $\square \varphi = \rho/\varepsilon_0$ ,  $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ ,  $\operatorname{div} \vec{A} + \partial_t \varphi/c^2 = 0$ , so liegt es nahe, das kontravariante Vektorfeld

$$(A^\mu(x)) = \left( \frac{1}{c} \varphi(x), \vec{A}(\vec{x}) \right)$$

zu definieren, das sich folgendermaßen transformiert:

$$\hat{A}^\mu(\hat{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x),$$

so daß

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

in jedem Inertialsystem gilt!

Aus  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \partial_t \vec{A}$ ,  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  wird ferner

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E^1, E^2, E^3), & \vec{B} &= (B^1, B^2, B^3), \\ E^j &= -c(\partial_j A^0 + \partial_0 A^j) = c(\partial_0 A_j - \partial_j A_0), \\ B^j &= \partial_k A^l - \partial_l A^k = -\partial_k A_l + \partial_l A_k, & (j, k, l) &\text{zyklisch } (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Die Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden also einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe, den Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} E^j &= F_{0j} = -F_{j0} = F^{j0} = -F^{0j}, & j &= 1, 2, 3, \\ B^1 &= F_{32} = -F_{23} = F^{32} = -F^{23}, \\ B^2 &= F_{13} = -F_{31} = F^{13} = -F^{31}, \\ B^3 &= F_{21} = -F_{12} = F^{21} = -F^{12}. \end{aligned}$$

Die "inhomogenen" Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}),$$

lauten in dieser Notation:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 j^\nu(x).$$

Für  $F^{\mu\nu}$  gilt das Transformationsgesetz

$$\hat{F}^{\mu\nu}(\hat{x}) = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x).$$

Die "homogenen" Gleichungen  $\text{rot}\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$ ,  $\text{div}\vec{B} = 0$ , lassen sich als

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

schreiben. Diese kann man auch anders formulieren, wenn man den vollständig antisymmetrischen kovarianten  $\varepsilon$ -Tensor ( $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ) einführt:  $\varepsilon_{0123} = +1$ ;  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ , falls je zwei der Indices gleich;  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1$ , je nachdem  $(\mu\nu\rho\sigma)$  eine gerade oder ungerade Permutation von (0123) ist.

Bei Lorentz-Transformationen gilt:

$$\hat{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Definition:

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}.$$

Mit diesem "dualen" Feldstärke-Tensor lassen sich dann die obigen "homogenen" Maxwell'schen Gleichungen als

$$\partial^\mu {}^*F_{\mu\nu} = 0$$

schreiben!

### Lorentz-Kovarianz der Lorentz-Kraft:

(s. wiederum die Mechanik-Vorlesung vom WS 97/98)

$$\vec{p} = m\vec{u} = m\gamma(v)\vec{v}; \quad u^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau, \quad \tau : \text{Eigenzeit}, \quad m : \text{Ruhemasse}.$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = q \left( u^0 \frac{\vec{E}}{c} + \vec{u} \times \vec{B} \right),$$

$$p^0 = mu^0 = \frac{1}{c} E, \quad E : \text{Energie},$$

$$\frac{dp^0}{d\tau} = q \vec{u} \cdot \frac{\vec{E}}{c} : \quad \text{relativistische Leistung.}$$

Zusammengefaßt:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

### Lorentz-Kraftdichte und Energie-Impuls-Tensor:

$$\begin{aligned} k^i &= \rho(x) E^i + (\vec{j} \times \vec{B})^i \\ &= F^{i\nu} j_\nu, \quad i = 1, 2, 3 : \quad \text{Kraftdichte,} \\ k^0 &= \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} = F^{0\nu} j_\nu : \quad \text{Leistungsdichte.} \end{aligned}$$

Zusammengefaßt:

$$k^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu, \mu = 0, 1, 2, 3 .$$

Definition des Energie-Impuls-Tensors:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} (F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \\ &= \Theta^{\nu\mu}(x), \quad \text{symmetrischer Tensor,} \\ \Theta^{00} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) = w(x), \\ \Theta^{0j} &= \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times \vec{B})^j = \frac{1}{c} S^j, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \\ \Theta^{ij} &= -T^{ij}, \\ T^{ij} &= \varepsilon_0 (E^i E^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} \vec{E}^2) + \frac{1}{\mu_0} (B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} \vec{B}^2). \end{aligned}$$

Die **Energie-Impuls-Bilanzen** lauten jetzt:

$$\partial_\nu \Theta^{\nu\mu} = -k^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3 ;$$

$$\mu = 0 \quad : \quad k^0 = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} = -\partial_0 w(x) - \frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{S} .$$

Mehr über Elektrodynamik, Optik und spezielle Relativitätstheorie in der Vorlesung **Spezielle Relativitätstheorie**, gehalten im WS.

# Kapitel 15

## Elektrische und magnetische Felder in Materie

Bisher haben wir im wesentlichen nur die elektrischen und magnetischen Felder von ruhenden und bewegten Ladungen im Vakuum diskutiert (Ausnahme: Ohmsches Gesetz:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ). Die Anwesenheit von makroskopischer Materie kann jedoch die Werte und Eigenschaften der "Vakuum"-Felder mehr oder weniger stark modifizieren. Die Art der Modifikation hängt von der Art der Substanzen ab, die in die Felder gebracht werden, und da es sehr viele elektrisch und magnetisch unterschiedliche Substanzen gibt, so gibt es auch sehr viele mögliche Modifikationen der Vakuumfelder. Hier können nur die allereinfachsten Einflüsse von Substanzen auf elektrische und magnetische Felder erwähnt werden.

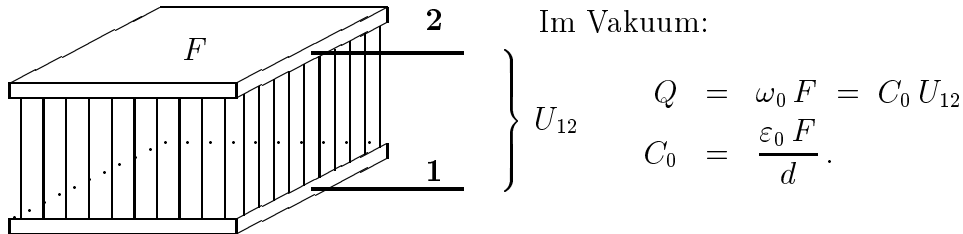
Es sei auch daran erinnert, daß man im allgemeinen ohne sorgfältige **thermodynamische** Analysen nicht auskommt, wenn man das Verhalten von Substanzen in elektrischen und magnetischen Feldern diskutieren will!

### Zusätzliche Literatur

1. L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Elektrodynamik der Kontinua (Lehrbuch d. Theoret. Physik, Band 8), 3. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1974.
2. Ch. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 5th Edition, John Wiley, New York . . . , 1976 (oder spätere Auflagen und deutsche Übersetzungen).

### 15.1 Die elektrische Polarisation

Schon Faraday hat beobachtet, daß sich die Kapazität eines Plattenkondensators vergrößert, wenn man ihn mit Materie füllt:



Das Einbringen von Materie erhöht die Kapazität:  $C_0 \rightarrow C = \varepsilon C_0$ ,  $\omega_0 \rightarrow \omega = \varepsilon \omega_0$ .  
Beispiele:

$$\varepsilon = \begin{cases} 5 \text{ bis } 8 & \text{bei Glas} \\ 81 & \text{bei Wasser,} \end{cases}$$

$\varepsilon$  : **Dielektrizitätskonstante (=DK)**,  
 $\chi = \varepsilon - 1$  : **elektrische Suszeptibilität**.

Im folgenden wird zunächst nur die Elektrostatik behandelt.

Grobe Unterteilung von Substanzen, mit unterschiedlichen Eigenschaften der Suszeptibilität  $\chi$ :

1. **Dielektrische Stoffe:**

$\chi$  ist feld- und  $\chi/\rho_m$  temperaturunabhängig,  $\rho_m$  : Massendichte.

2. **Paraelektrische Stoffe:**

$\chi$  ist feldunabhängig,  $\chi/\rho_m$  aber temperaturabhängig.

3. **Ferroelektrische Stoffe:**

$\chi$  ist feld- und temperaturabhängig und sein Wert hängt von der Vorgeschichte ab (Hysterese).

Bringt man einen reinen Isolator in ein äußeres Feld  $\vec{E}_0$ , so werden durch das Feld  $\vec{E}_0$  **elektrische Dipole induziert**, bzw. **schon vorhandene**, in ihren Richtungen thermisch-statistisch verteilte Dipole **ausgerichtet**.

Seien  $\vec{p}_i(\vec{y}_i)$  Dipole an Orten  $\vec{y}_i$ .

Das Potential aller Dipole beträgt:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{\vec{p}_i \cdot (\vec{x} - \vec{y}_i)}{\|\vec{x} - \vec{y}_i\|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \vec{p}_i \cdot \text{grad} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}_i\|}.$$

Der Übergang zum Kontinuum mit  $\vec{P}(\vec{y})$  als "Dipolmoment-Dichte" ergibt

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G d^3y \vec{P}(\vec{y}) \cdot \text{grad}_y \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G d^3y \text{div}_y \left[ \frac{\vec{P}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right] - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G d^3y \frac{\text{div} \vec{P}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}, \end{aligned}$$

also

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial G} d\vec{f} \cdot \frac{\vec{P}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G d^3y \frac{-\operatorname{div}\vec{P}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|},$$

$\vec{P}(\vec{x})$  : "elektrische Polarisation".

Der Vergleich mit den Formeln auf S. 18 zeigt:

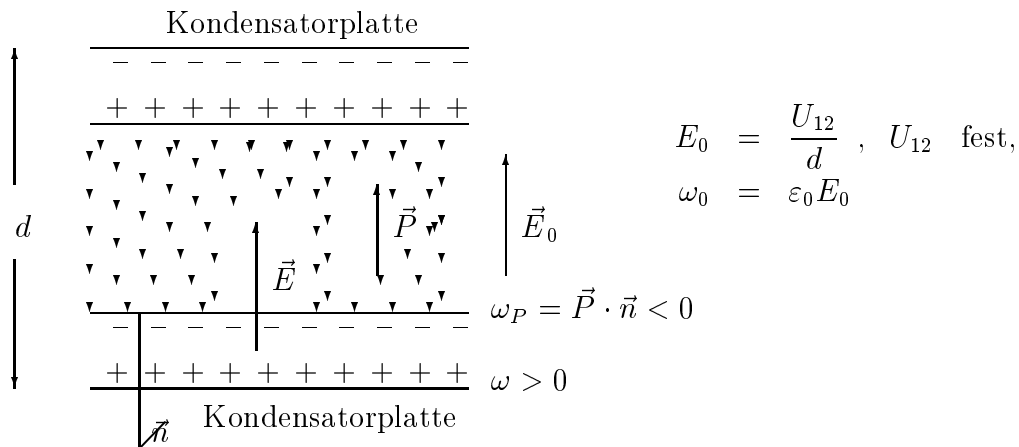
Mit der Polarisation  $\vec{P}(\vec{x})$  sind die **Flächenladungen**

$$\omega_P(\vec{x}) = \vec{P} \cdot \vec{n}(\vec{x}), \quad \vec{n} : \text{Flächennormale,}$$

und die Raumladungen

$$\rho_P(\vec{x}) = -\operatorname{div}\vec{P}(\vec{x})$$

verknüpft. Sie verschwinden, wenn das äußere Feld verschwindet (außer bei Ferroelektrika) und sind auch nicht als "freie" Ladungen verfügbar.



Die der unteren Kondensatorplatte mit Ladungen  $\omega > 0$  gegenüberliegenden Polarisationsladungen  $\omega_P$  sind negativ. Damit im Innern der Substanz weiterhin das Feld  $\vec{E}_0$  vorliegt, müssen auf der Kondensatorplatte die Ladungen

$$\omega = \omega_0 - \omega_P = \epsilon\omega_0$$

sitzen, d. h. **im Spalt**, dessen Dicke  $\ll d$  ist, hat man das Feld

$$\begin{aligned} E = -\vec{n} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \omega = \frac{1}{\epsilon_0} (\omega_0 - \omega_P) = -\vec{n} \cdot \left( \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon \omega_0 = -\epsilon \vec{n} \cdot \vec{E}_0, \end{aligned}$$

so daß hier

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} = \chi \vec{n} \cdot \vec{E}_0.$$

Allgemein: **Elektrostatik mit Polarisation:** Für  $\vec{E}$  gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= 0 & \Rightarrow & \vec{E} = -\text{grad } \varphi(\vec{x}) \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \text{div} \vec{P}), \\ \text{d. h.} \quad \text{div} \vec{D} &= \rho, & \vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \end{aligned}$$

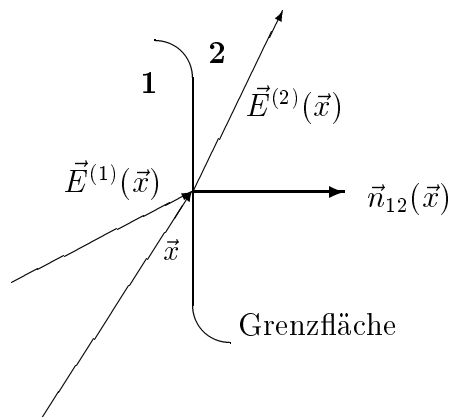
$\vec{D}$  heißt ”**elektrische Verschiebung**”. (Der Name geht auf Äther-Vorstellungen des 19. Jahrhunderts zurück).  $\vec{D}$  ist zunächst nur eine Rechengröße. Für die Lösung der obigen Gleichung (für  $\vec{E}$ ) **muß man  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{P}$  als Funktion von  $\vec{E}$  kennen:**

$$\vec{P}(\vec{x}) = \vec{P}[\vec{E}(\vec{x}), \vec{x}] .$$

Im einfachsten Fall isotroper Materialien hat man

$$\vec{P}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad , \quad \vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}(\vec{x}) .$$

Verhalten von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  an Grenzflächen:



Analog zu S. 26 gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} &= \omega + \omega_{P_1} + \omega_{P_2}, \\ \omega_{P_1} &= \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{12} \quad , \quad \omega_{P_2} = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{12}, \end{aligned}$$

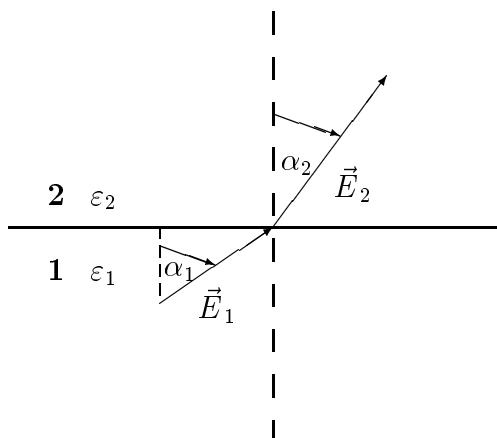
d. h.

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \omega .$$

Aus  $\text{rot} \vec{E} = 0$  folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{E}$ :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n}_{12} = 0 .$$

Falls  $\omega = 0$  sind die Normalkomponente  $\vec{D}_n$  und die Tangentialkomponente  $\vec{E}_t$  stetig.

**Brechungsgesetz:**

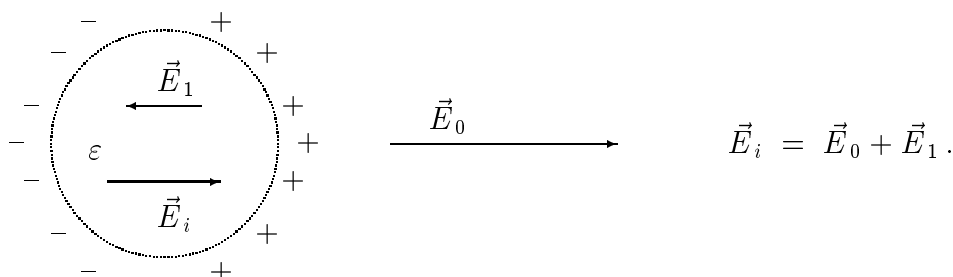
$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2$$

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \quad , \quad D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} .$$

**Dielektrische Kugel vom Radius  $a$  und mit  $\varepsilon = \varepsilon_2$  in einem Medium mit  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , in dem das äußere Feld  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_1$  herrscht:**



Das Potential  $\varphi$  muß den Bedingungen genügen

$$\Delta \varphi = 0 \text{ überall ,}$$

$$\varphi \text{ und } \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \text{ stetig an der Kugeloberfläche.}$$

Ansatz:

$$r \leq a : \quad \varphi = -\vec{E}_i \cdot \vec{x} = -E_i r \cos \vartheta, \quad E_i = \text{const.},$$

$$r \geq a : \quad r \rightarrow \infty \quad : \quad \varphi \rightarrow -\vec{E}_0 \cdot \vec{x} .$$

Im Endlichen wirkt eine polarisierte Kugel wie ein Dipol:

$$r \geq a : \quad \varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{x} + k \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} .$$

$E_i$  und  $k$  sind aus der Stetigkeit von  $\varphi$  und  $(\varepsilon \partial \varphi / \partial r)$  für  $r = a$  zu bestimmen:

$$E_i = E_0 - k \frac{E_0}{a^3},$$

$$\varepsilon_2 E_i = \varepsilon_1 E_0 \left(1 + \frac{2k}{a^2}\right),$$

d. h.

$$\vec{E}_i = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \vec{E}_0, \quad k = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} a^3.$$

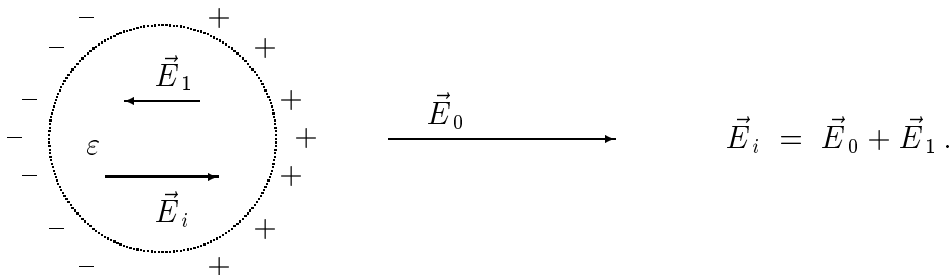
Spezialfall:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon = 1 + \chi > 1,$$

$$\vec{E}_i = \frac{3}{2 + \varepsilon} \vec{E}_0, \quad k = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3,$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E}_i = \frac{3(\varepsilon - 1)}{2 + \varepsilon} \varepsilon_0 \vec{E}_0.$$

Da  $\varepsilon > 1$  gilt, so ist  $\|\vec{E}_i\| < \|\vec{E}_0\|$ : **”Depolarisation”**:



Die durch  $\vec{E}_0$  induzierten Oberflächenladungen erzeugen im Innern der Kugel ein Feld  $\vec{E}_1$ , das  $\vec{E}_0$  entgegengerichtet ist.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i - \vec{E}_0 = \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} \vec{E}_0 = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{P}$$

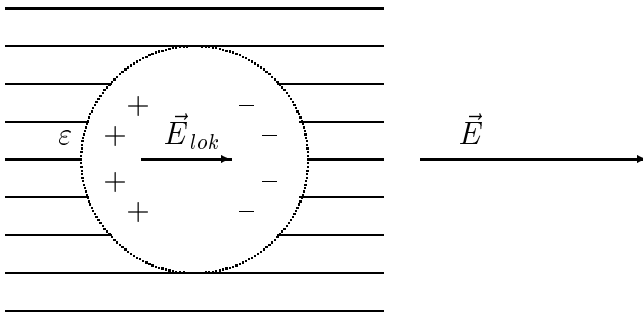
$$\varepsilon_0 \vec{E}_1 = -\frac{1}{3} \vec{P}$$

$\frac{1}{3}$ : **”Entelektrisierungsfaktor”**

**Anwendung:**

Substanz mit DK  $\varepsilon$ , in der ein homogenes makroskopisches Feld  $\vec{E}$  vorliegt. **Welches ”lokale” Feld  $\vec{E}_{lok}$  wirkt auf die atomaren Dipole?**

**Grobes Modell:** Das atomare Dipolmoment sitze in einem kugelförmigen Hohlraum:



Das Feld  $\vec{E}$  erzeugt auf der Innenseite der Kugel Oberflächenladungen, die das Feld im Innern vergrößern:  $\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \vec{E}_P$ .

Füllt man nun das Loch mit der gerade besprochenen Kugel, die ebenfalls die DK  $\epsilon$ , so verschwindet das Loch vollständig und man sieht, daß  $\vec{E}_P = -\vec{E}_1$  sein muß!  
Also

$$\vec{E}_{lok} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}.$$

Es sei  $\alpha$  **die atomare Polarisierbarkeit**, d.h. das durch das Feld  $\vec{E}_{lok}$  erzeugte atomare Dipolmoment  $\vec{p}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \alpha \vec{E}_{lok} \\ \vec{P} &= n \alpha \vec{E}_{lok} \\ &= n \alpha \left( \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right) \end{aligned}$$

$n$ : Dichte der Moleküle = Anzahl/Volumen.

Da außerdem  $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ , so folgt schließlich

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{n \alpha}{\epsilon_0}, \quad (\text{Clausius, Mosotti}).$$

Falls  $\epsilon \approx 1$ , so hat man die Näherung

$$\epsilon - 1 = \frac{n \alpha}{\epsilon_0}.$$

### Energetische Beziehungen:

Bringt man die Ladung  $\delta\rho$  in ein Gebiet  $G$ , in dem das Potential  $\varphi$  vorliegt, so führt dies zu einer Energieänderung

$$\delta A = \int_G d^3y \varphi(\vec{y}) \delta\rho(\vec{y}).$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ ,  $\operatorname{div} \delta \vec{D} = \delta \rho$ , folgt

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_G d^3y \varphi \operatorname{div} \delta \vec{D} \\ &= \int_G d^3y \operatorname{div}(\varphi \delta \vec{D}) - \int_G d^3y (\delta \vec{D}) \cdot \operatorname{grad} \varphi \\ &= \int_{\partial G} \varphi \delta \vec{D} \cdot d\vec{f} + \int_G d^3y (\vec{E} \cdot \delta \vec{D}). \end{aligned}$$

Ist  $\delta \vec{D} = 0$  auf  $\partial G$ , so hat man

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_G d^3x \delta w(\vec{x}), \quad \delta w(\vec{x}) = \vec{E} \cdot \delta \vec{D}, \\ \text{Energiedichte} &: w(\vec{x}) = \int_0^{D(\vec{x})} \vec{E} \cdot d\vec{D}. \end{aligned}$$

Falls

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

so haben wir

$$w = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \int_0^D \vec{D} d\vec{D} = \frac{1}{2\varepsilon \varepsilon_0} \vec{D}^2 = \vec{E} \cdot \vec{D}.$$

### Thermodynamik:

Bei den vorherigen Überlegungen wurde die Temperatur  $T$  konstant gehalten, d. h.

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta F, \\ F &= U - TS \quad : \quad \text{freie Energie.} \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

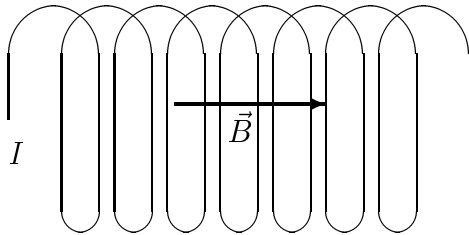
$$\delta F = -S \delta T + \int (\vec{E} \cdot \delta \vec{D}) d^3x,$$

$U$ : Innere (thermische) Energie,  $S$ : Entropie.

Bei der Diskussion der energetischen Eigenschaften von elektrischen und magnetischen Feldern in Materie ist wesentlich, die thermodynamischen Variablen wie Temperatur, Entropie etc. in die Überlegungen einzubeziehen. Dies wird im Rahmen der Vorlesung über Thermodynamik geschehen.

## 15.2 Magnetisierung

Stromdurchflossene Spule:



$I$  : Strom  
 $F$  : Querschnitt  
 $l$  : Länge  
 $n$  : Anzahl der  
 Windungen/Länge

Im Vakuum gilt

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= n l F B_0 = L_0 I, \\ L_0 &= \mu_0 n^2 F l.\end{aligned}$$

Bringt man Materie in das Innere der Spule, so ändert sich  $\Phi_0$  bzw.  $L_0$ :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &\rightarrow \Phi = \mu \Phi_0, & L_0 &\rightarrow L = \mu L_0, \\ \mu &: \text{''Permeabilität''}, \\ \kappa = \mu - 1 &: \text{''Magnetische Suszeptibilität''}.\end{aligned}$$

Erfahrungsgemäß gibt es folgende, qualitativ verschiedene "magnetische" Substanzen:

1. Diamagnetische Stoffe:  $\kappa < 0$ ,  $\mu < 1$   
z. B.  $\kappa_{H_2O} = -9.0 \cdot 10^{-6}$ .
2. Paramagnetische Stoffe:  $\kappa > 0$ ,  $\kappa \sim 1/T$ .
3. Ferromagnetische Stoffe:  $\kappa$  hängt vom Feld  $\vec{B}$ , der Temperatur  $T$  und der Vorgeschichte ab (Hysterese).

Analog zur elektrischen Polarisation rührt die Magnetisierung von Materialien von der Existenz atomarer magnetischer Dipole her.

Nach S. 54 gehört zu einem Dipol  $\vec{m}(\vec{y})$  das Vektorpotential

$$\vec{A}_m(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3},$$

oder, mit  $\vec{M}(\vec{y})$  als Dipoldichte = "Magnetisierung",

$$\begin{aligned}\vec{A}_m(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3y \frac{\vec{M}(\vec{y}) \times (\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3y \vec{M}(\vec{y}) \times \text{grad}_y \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|}.\end{aligned}$$

Umformung ergibt

$$\vec{A}_m(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3y \operatorname{rot}_y \left[ \frac{\vec{M}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right] + \int_G d^3y \frac{\operatorname{rot}_y \vec{M}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} ,$$

und da

$$\int_G \operatorname{rot} \vec{C} d^3x = \int_{\partial G} (\vec{n} \times \vec{C}) \|d\vec{f}\| ,$$

so folgt

$$\vec{A}_m(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{\vec{M}(\vec{y}) \times \vec{n}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \|d\vec{f}\| + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G d^3y \frac{\operatorname{rot}_y \vec{M}(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} .$$

Der Vergleich mit S. 54 zeigt: Zur Magnetisierung  $\vec{M}$  gehört eine **Oberflächenstromdichte**

$$\vec{h}_M(\vec{x}) = \vec{M}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) , \quad \vec{n} : \text{Normalenvektor} ,$$

und eine **Stromdichte**:

$$\vec{j}_M = \operatorname{rot} \vec{M} .$$

Für  $\vec{B}$  bekommen wir daher, außer  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , die Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_M) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \operatorname{rot} \vec{M} , \\ \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} , \quad \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} . \end{aligned}$$

$\vec{H}$  ist zunächst eine Rechengröße, die mit  $\vec{B}$  im Vakuum bis auf den Faktor  $1/\mu_0$  übereinstimmt und deren "Wirbel" die "freien" Ströme  $\vec{j}$  bilden.

In der Spule haben wir

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} , \quad \vec{M} = \kappa \vec{H} , \quad \vec{j}_M = \kappa \vec{j} .$$

Dies gilt nur für homogene isotrope Materialien:

$\vec{H}$  : magnetisches Feld ("historisch"),

$\vec{B}$  : magnetische Induktion.

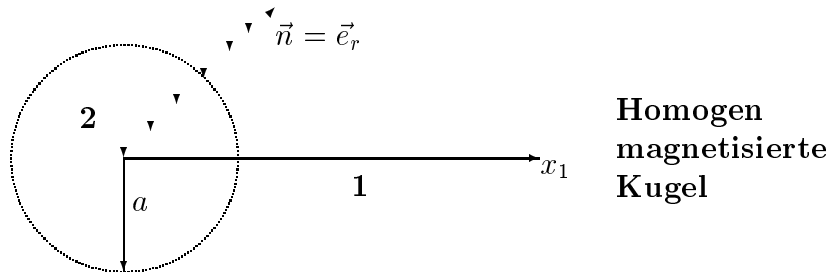
**Grenzflächen:**

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \vec{n}_{12} = 0 .$$

Falls es keine Oberflächenströme  $\vec{h}$  gibt (nicht zu verwechseln mit  $\vec{h}_M$ ), so folgt aus  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$ , daß

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n}_{12} = 0 .$$

**Beispiel:**



Außenraum:  $r \geq a$  :

$$\mu_0 \vec{H}_1 = \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{x})\vec{x}}{r^5} \right),$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \vec{M}.$$

Innenraum:  $r \leq a$ :

$$\vec{B}_2 = \mu_0 (\vec{H}_2 + \vec{M}) = \text{const.}$$

Stetigkeit der Normalkomponente von  $\vec{B}$  für  $r = a$ :

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{e}_r = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_r}{a^3} = \vec{B}_2 \cdot \vec{e}_r.$$

Da  $\vec{m} \parallel \vec{B}_2$ , so folgt

$$\vec{B}_2 = \frac{2\mu_0 \vec{m}}{4\pi a^3} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{H}$ :

$$\vec{H}_1 \times \vec{e}_r = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{e}_r}{a^3} = \vec{H}_2 \times \vec{e}_r \quad | \times \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m}}{a^3} = -\frac{1}{3} \vec{M},$$

d. h.  $\vec{B}_2$  und  $\vec{H}_2$  haben im Innern ein qualitativ stark verschiedenes Verhalten! Das hängt mit den Grenzflächenbedingungen zusammen.

### 15.3 Ausbreitung von elektromagnetischen Feldern in Materie

Ausgangspunkt sind die Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} , & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho , \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \partial_t \vec{D} , & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 . \end{aligned}$$

Die Ersetzung  $\varepsilon_0 \vec{E} \rightarrow \vec{D}$  beim "Verschiebungsstrom" folgt aus der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 .$$

Hinzu kommen noch die für isotrope Substanzen gültigen "Materialgleichungen":

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} , \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} , \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} , \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  und  $\mu$  bei zeitabhängigen Feldern jedoch im allgemeinen anders als im statischen bzw. stationären Falle zu interpretieren sind (s. unten!). Aus den obigen Gleichungen folgt wie früher – Kapitel 11 – die **Energiebilanz**:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{j} \cdot \vec{E} ,$$

d.h.

$$-(\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} .$$

Wir suchen Lösungen der obigen Gleichungen mit der  $(t, \vec{x})$ -Abhängigkeit

$$e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} .$$

Dabei ergeben sich die Korrespondenzen

$$\partial_t \rightarrow -i\omega , \quad \partial_j \rightarrow i k_j ,$$

und wir erhalten die algebraischen Gleichungen :

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} , & \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} - i\vec{j} , \\ \vec{k} \cdot \vec{D} &= -i\rho , & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 , \\ \omega\rho &= \vec{k} \cdot \vec{j} & & \text{(Kontinuitätsgleichung).} \end{aligned}$$

Nimmt man noch  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$  und  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$  hinzu, so erhält man

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \omega\vec{B}, & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{k} \times \vec{B} &= \mu_0\mu(\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma)\vec{E}, \\ (\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma)\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß es **zwei Typen** von Lösungen geben kann:

i)  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$  bilden ein orthogonales Dreibein !

Da

$$\vec{k} \cdot \vec{j} = \sigma\vec{k} \cdot \vec{E} = 0,$$

ii) so muß  $\rho = 0$  sein.

$$(\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{B} = 0.$$

Wegen  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  folgt  $\vec{B} = 0$ .

Zur Auswertung dieser Gleichungen müssen zunächst - vereinfacht - die Eigenschaften von  $\sigma$  und  $\varepsilon$  bei zeitabhängigen Feldern diskutiert werden:

### ”Dynamische” Leitfähigkeit

Im *stationären* Fall,  $\vec{E} = \text{const.}$ , haben wir für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Ladungsträger das ”Reibungsgesetz”:

$$\vec{v} = \mathcal{B}q\vec{E}, \quad \mathcal{B} : \text{”Beweglichkeit”},$$

und daher

$$\begin{aligned}\vec{j} &= nq\vec{v} = nq^2\mathcal{B}\vec{E} = \sigma_0\vec{E}, \\ \sigma_0 &= nq^2\mathcal{B}, \quad n : \text{Teilchendichte.}\end{aligned}$$

Für  $\partial_t\vec{E} \neq 0$  haben wir jedoch das Kraftgesetz

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} - \frac{\vec{v}}{\mathcal{B}},$$

bzw.

$$\tau\partial_t\vec{j} + \vec{j} = \sigma_0\vec{E}, \quad \tau = m\mathcal{B} : \text{”Stoßzeit”}.$$

Bei  $(t, \vec{x})$ -Abhängigkeiten  $e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$  wird daraus

$$-i\tau\omega \vec{j} + \vec{j} = (1 - i\tau\omega) \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} ,$$

also

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} , \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\tau\omega} .$$

Die sogenannte "dynamische" Leitfähigkeit ist also komplex! Dies bedeutet anschaulich, daß bei zeitlich schnell veränderlichen elektrischen Feldern die entsprechende Stromdichte der bewegten Ladungsträger nicht mehr "in Phase" mit den elektrischen Feldern ist.

### "Dynamische Dielektrizitätskonstante"

Mechanisches Modell: Ladung  $q$  am Massenpunkt  $m$  schwingt gedämpft unter Einfluß des Feldes  $\vec{E}$ :

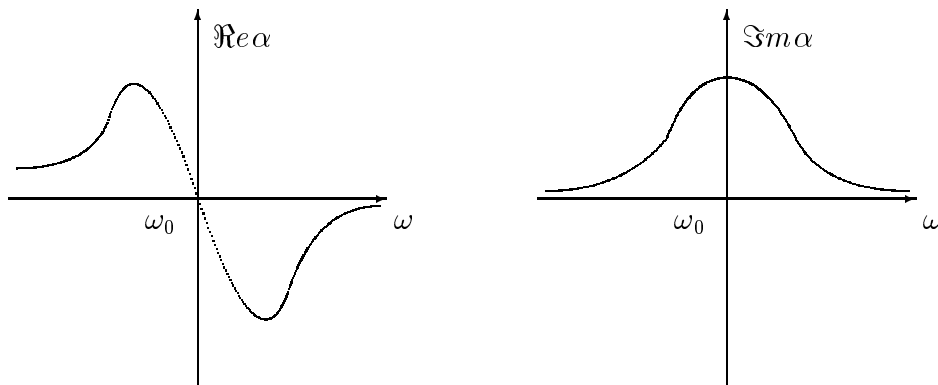
$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x}) = q \vec{E} .$$

Zeitabhängiges Dipolmoment:  $\vec{p} = q \vec{x}$

$$\ddot{\vec{p}} + \gamma \dot{\vec{p}} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{q^2}{m} \vec{E} ,$$

$$\vec{p} \sim e^{-i\omega t} : \quad (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{p} = \frac{q^2}{m} \vec{E} ,$$

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} , \quad \alpha = \alpha(\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} .$$



Bei verdünnten Gasen:

$$\varepsilon = 1 + \frac{n\alpha(\omega)}{\varepsilon_0} = \varepsilon(\omega) .$$

Sonst gilt nach Clausius-Mosotti:

$$\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 2} = \frac{n}{3\varepsilon_0} \alpha(\omega) .$$

$\varepsilon(\omega)$  ist also im allgemeinen komplex.

**Kurze Diskussion der beiden oben gefundenen Lösungstypen:**

i)

$$\begin{aligned}\vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B}, \rightarrow \text{pace} 1cm \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, & \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{k} \times \vec{B} &= \mu\mu_0 (\varepsilon\varepsilon_0 \omega + i\sigma) \vec{E}.\end{aligned}$$

Vektorielle Multiplikation der letzten Gleichung mit  $\vec{k}$  ergibt für  $\vec{k}^2$  die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned}k^2 \equiv \vec{k}^2 &= \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0\omega^2 \left(1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right) \\ &= \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right).\end{aligned}$$

$\vec{k}$  ist also im allgemeinen ein komplexer Vektor!

**Spezialfälle:**1.  $\sigma = 0$  (**Isolatoren**):

Für  $\omega \neq \omega_0$  ist  $\varepsilon$  näherungsweise reell, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}k &= \pm \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon\mu} = \pm \frac{\omega}{c}, & c &= c_0/n, \\ n &= \sqrt{\varepsilon\mu} : & & \text{Brechungsindex.}\end{aligned}$$

Sei  $\vec{k} \parallel \vec{e}_1$ , dann ist:

$$e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = e^{-i\omega(t - \frac{nx_1}{c_0})}.$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit:  $c = c_0/n$ .

Falls  $\varepsilon$  komplex ist, gilt:  $\sqrt{\varepsilon\mu} = \tilde{n} = n + i\kappa$ ,  $\kappa > 0$ ,

$$e^{-i\omega[t - x_1 \frac{(n+i\kappa)}{c_0}]} = e^{-i\omega(t - x_1 \frac{n}{c_0})} \underbrace{e^{-\frac{\omega}{c_0} \kappa x_1}}_{\text{Dämpfung der Welle!}}$$

$\kappa$  : **Extinktionskoeffizient.**

2.  $\sigma \neq 0$ :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \tilde{n}, \quad \tilde{n} : \text{komplex},$$

$$\tilde{n} = n + i\kappa = \left[ \varepsilon\mu \left( 1 + \frac{i\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0\omega(1-i\omega\tau)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Falls  $\omega\tau \ll 1$ , so wird  $(1-i\omega\tau) \approx 1$ . Oft ist ferner  $\sigma_0/\varepsilon_0 \gg 1/\tau$ , so daß hier

$$n \approx \kappa \approx \left( \frac{\mu\sigma_0}{2\omega\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Eindringtiefe**  $d$ , definiert durch:  $\omega\kappa d/c_0 = 1$ ,

$$d = \frac{c_0}{\omega\kappa} = \left( \frac{2}{\mu\mu_0\sigma_0\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{''Skin-Effekt''}.$$

Falls  $\omega\tau \gg 1$ , so ist

$$\tilde{n} = n + i\kappa \approx \left[ \varepsilon\mu \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_P^2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0\tau} = \frac{nq^2}{\varepsilon\varepsilon_0m}; \quad \omega_P : \text{''Plasma''-Frequenz.}$$

$\omega \ll \omega_P$  : starke Absorption,

$\omega \gg \omega_P$  : kaum Absorption.

ii)

$$(\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma) = 0, \quad \vec{B} = 0.$$

Da  $\vec{k} \times \vec{E} = 0$ , so ist  $\vec{E}$  **''longitudinal''**.

$$\omega\rho = \sigma\vec{k} \cdot \vec{E} \neq 0$$

zeigt, daß auch **die Ladungsdichte  $\rho$  schwingt**. Die Frequenz der Schwingung ist aus

$$\varepsilon\varepsilon_0\omega = -\frac{i\sigma_0}{1-i\omega\tau}$$

zubestimmen. D.h.

$$\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} - \omega_P^2 = 0.$$

Falls  $\omega_P \gg 1/\tau$ , so schwingt die Dichte  $\rho$  (der Elektronen) mit der Frequenz  $\omega_P$  gegen den festen Ionenhintergrund. Daher der Name Plasmafrequenz!

Weiteres ist in den Lehrbüchern über Festkörperphysik nachzulesen!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Voraussetzungen . . . . .	1
1.2	Literatur zur Vorlesung . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Elektrische Ladungen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundphänomene der Elektrodynamik . . . . .	3
2.2	Elektrische Ladung als Erhaltungsgröße . . . . .	4
2.2.1	Mikroskopische Formulierung . . . . .	4
2.2.2	<b>Makroskopische Formulierung des Satzes von der Erhaltung der Gesamtladung eines abgeschlosse- nen Systems</b> . . . . .	4
2.3	Kräfte zwischen Ladungen . . . . .	8
2.3.1	Eigenschaften der Coulomb-Kräfte . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Statische Elektrische Felder</b>	<b>11</b>
3.1	Gaußscher Satz über Felder und Ladungen . . . . .	12
3.1.1	Die Diracsche Delta-”Funktion” . . . . .	13
3.1.2	Ladungen als Quellen von elektrischen Feldern . . . . .	15
3.2	Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes . . . . .	21
3.2.1	Die ”Wirbel” eines Vektorfeldes und Stokesscher Inte- gralsatz . . . . .	23
3.2.2	Randbedingungen für das elektrostatische Feld . . . . .	25
<b>4</b>	<b>El.-Stat. Feldenergien und Flächenkräfte</b>	<b>27</b>
4.1	Feldenergie . . . . .	27
4.2	Flächenkräfte . . . . .	28
4.3	Wichtigste Feldgleichungen der Elektrostatik . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Elektrostatische Multipole</b>	<b>35</b>
5.1	Multipole in kartesischen Koordinaten . . . . .	35
5.1.1	Diskussion . . . . .	37
5.2	Multipole in Polarkoordinaten . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Ideale Leiter in der Elektrostatik</b>	<b>40</b>
6.1	Randbedingungen an Oberflächen . . . . .	40
6.2	Kapazitäten von Leitern . . . . .	43
6.3	Spiegelladungen . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Ströme und magnetische Kräfte</b>	<b>47</b>
7.1	Stationäre Ströme und Ohmsches Gesetz . . . . .	47
7.2	Kräfte auf bewegte Ladungen in magn. Feldern . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Magnetische Felder und Ströme</b>	<b>53</b>
8.1	Das Gesetz von Biot und Savart . . . . .	53
8.2	Magnetische Dipole . . . . .	56
8.3	Gleich'gen zur Physik stationärer Ströme . . . . .	58
<b>9</b>	<b>Das Faradaysche Induktionsgesetz</b>	<b>60</b>
9.1	Herleitung mittels Galilei-Transformationen . . . . .	60
9.2	Magnetischer Fluß und Induktivitäten . . . . .	62
9.3	Grundgleichungen der Wechselstromtechnik . . . . .	64
<b>10</b>	<b>Die Maxwellschen Gleichungen</b>	<b>67</b>
10.1	Der Maxwellsche Verschiebungsstrom . . . . .	67
10.2	Maxwellsche Gleichungen als Zeitentw.-Gleich'gen . . . . .	68
10.3	Die elektromagnetischen Potentiale . . . . .	69
<b>11</b>	<b>Energie- und Impulsbilanzen</b>	<b>73</b>
11.1	Energieerhaltung, Energiedichten, Poynting-Vektor . . . . .	73
11.2	Lorentz-Kraft, Flächenkraft und Feldimpuls . . . . .	76

<b>12 Elektromagnetische Wellen</b>	<b>78</b>
12.1 Ebene elektromagnetische Wellen . . . . .	78
12.1.1 Allgemeine ebene Wellen . . . . .	79
12.1.2 Monochromatische ebene Wellen . . . . .	80
12.1.3 Wellengleichungen für die Felder . . . . .	82
12.2 Wellenpakete und Fouriertransformation . . . . .	82
12.3 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern . . . . .	85
12.3.1 Randbedingungen für zeitabhängige elektromagnetische Felder . . . . .	85
12.3.2 Wellen in metallischen Hohlleitern . . . . .	87
<b>13 Felder von Ladungs- und Stromverteilungen</b>	<b>93</b>
13.1 Greensche Funktionen der Wellengleichung . . . . .	93
13.2 Potentiale und Felder von Ladungen und Strömen . . . . .	98
13.2.1 Schwingender elektrischer Dipol . . . . .	98
13.2.2 Das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punkt- ladung $q$ . . . . .	102
<b>14 Relativistische Formulierung der E-Dynamik</b>	<b>108</b>
14.1 Grundbegriffe . . . . .	108
14.2 Anwendung auf die Elektrodynamik . . . . .	109
<b>15 Elektr. und magn. Felder in Materie</b>	<b>113</b>
15.1 Die elektrische Polarisierung . . . . .	113
15.2 Magnetisierung . . . . .	121
15.3 Ausbreitung von el.-magn. Feldern in Materie . . . . .	124