

Professor Dr. H. A. Kastrup
Übungen zur Quantenmechanik, WS 1996/97

Blatt 11, Abgabetermin: 3.2.97

Aufgabe 34

identische Teilchen im Kasten

a) Zwei nichtwechselwirkende identische fiktive B- bzw. F-Teilchen befinden sich in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential. B-Teilchen (F-Teilchen) seien dadurch gekennzeichnet, daß ihre Gesamtwellenfunktion u komplett symmetrisch (antisymmetrisch) bezüglich Teilchenaustausch ist. Das entsprechende Einteilchenproblem wurde in Kap. 4.3 gelöst und das Ergebnis läßt sich wie folgt zusammenfassen: Als Eigenfunktionen zu den Einteilchenenergien $\varepsilon_n = \varepsilon (n + 1)^2$, $\varepsilon \equiv \hbar^2 \pi^2 / 8ma^2$, erhielten wir

$$v_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{(n+1)\pi x}{2a}, & n = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{2a}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Bestimmen Sie die drei niedrigsten Energieniveaus E_0, E_1, E_2 des jeweiligen Zweiteilchenproblems, und geben Sie eine orthonormierte Basis $u_{n,\alpha}$, α eventueller Entartungsindex, für die entsprechenden Eigenräume an. (2 Punkte)

b) Gegeben seien zwei nichtwechselwirkende identische Spin-1/2-Teilchen in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential. Geben Sie wiederum die drei untersten Energieniveaus, deren Entartungen, sowie eine mögliche orthonormierte Basis für die Unterräume an. (1 Punkt)

3 Punkte

Aufgabe 35

Streuung zweier Teilchen aneinander

Die Streuung zweier Teilchen, deren Wechselwirkung nur durch ein vom Relativabstand abhängiges Potential $V = V(|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}|)$ beschrieben wird, wurde in Kapitel 5 des Skriptums auf die Streuung eines (fiktiven) Teilchens an einem Zentralpotential abgebildet. Bezeichnet $f(\vartheta)$ die entsprechende Streuamplitude, so errechnete sich der differentielle Wirkungsquerschnitt der Streuung von Teilchen 1 an Teilchen 2 zu $d\sigma(\vartheta)/d\Omega = |f(\vartheta)|^2$.

a) Betrachten Sie einen Detektor, der nicht zwischen Teilchen 1 und 2 unterscheiden könne. Teilchen 1 und 2 seien aber *nicht* identisch. Bestimmen Sie $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ als Funktion von $f(\vartheta)$! Zeigen Sie damit, daß sich der totale Wirkungsquerschnitt σ unter diesen Voraussetzungen verdoppelt. (1 Punkt)

Hinweis: Machen Sie eine Skizze zur Kinematik des Streuprozesses im Schwerpunktsystem.

Bemerkung: Macht man von den Streuphasen Gebrauch, so erhält man also $\sigma = (8\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$. Das nur zum Vergleich mit dem folgenden Unterpunkt.

b) Betrachten Sie nun die Streuung zweier identischer Spin-0-Teilchen aneinander. Was ergibt sich nun für $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ als Funktion von $f(\vartheta)$? Zeigen Sie damit, daß nun $\sigma = (16\pi/k^2) \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \sin^2 \delta_{2n}(k)$ gilt! (2.5 Punkte)

Hinweis: Durch Symmetrisieren (Antisymmetrisieren) einer Lösung der Schrödingergleichung eines Zweiteilchenproblems erhält man eine Lösung derselben Schrödingergleichung für Bosonen (Fermionen).

c) Betrachten Sie die Streuung zweier identischer Spin-(1/2)-Teilchen aneinander. Berechnen Sie zuerst $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ unter der Annahme, daß die beiden Fermionen vor der Streuung in einem Zustand mit Gesamtspin Null sind. Berechnen Sie nun $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ für den Fall, daß nichts über die Spinzustände der beiden Fermionen bekannt ist. (1.5 Punkte)

Hinweis: Im Falle unbekannter Spinzustände der Fermionen mittelt man die Einzelergebnisse über alle Einstellungsmöglichkeiten (der beiden Spins) mit gleichem Gewicht. (Man hat ein sogenanntes Zustandsgemisch vorliegen).

5 Punkte

Aufgabe 36

Spin-(1/2)-Dynamik

a) Gegeben sei ein in Kap. 7 des Skriptums bzw. in Aufgabe 29 eingeführter "Spinor" χ , der den Spinanteil eines Elektrons beschreibt (gyromagnetische Verhältnis $g = 2$). Zeigen Sie, daß der Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ im Falle eines konstanten äußeren \vec{B} -Feldes der Operator einer (zeitabhängigen) Drehung $U_S(\vec{n}, \varphi)$ wird. Bestimmen Sie Drehachse $\vec{n}(t)$ und Drehwinkel $\varphi(t)$. (1 Punkt)

b)* (**Bonusteil!**) Beweisen Sie die in der Vorlesung gemachte Behauptung

$$U_S \vec{S} U_S^\dagger = \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{S}) - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{S}) \cos \varphi + \vec{n} \times \vec{S} \sin \varphi ,$$

wobei $U_S \equiv U_S(\vec{n}, \varphi)$ und $\vec{S} \equiv \hbar \vec{\sigma}/2$.

(2* Punkte)

Hinweis: Die Pauli-Matrizen erfüllen: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$. (Summenkonvention)

Bemerkung: Obige Aussage ist äquivalent zu $U_S S_i U_S^\dagger = R_{ij} S_j$, $i = 1, 2, 3$, wobei $(R_{ij}) = (R_{ij}(\vec{n}, \varphi))$ genau jene orthogonale Matrix ist, die den Vektor \vec{S} mit Winkel φ um \vec{n} dreht. Operatoren, die so ein Verhalten unter Drehungen aufweisen, werden *Vektoroperator* genannt (z.B. auch $\vec{X}, \vec{P}, \vec{L}, \dots$).

c) Es zeige das \vec{B} -Feld in die 3-Richtung. Verwenden Sie die in (a) gemachte Beobachtung sowie die in (b) angegebenen Aussagen, um die Zeitentwicklung des Operators $\vec{e} \cdot \vec{S}$ im *Heisenbergbild* zu bestimmen, wobei \vec{e} ein beliebig orientierter Einheitsvektor ist. Beweisen Sie insbesondere, daß der Heisenbergoperator $(\vec{e} \cdot \vec{S})(t)$ gleich $\vec{e}(t) \cdot \vec{S}$ für einen zeitabhängigen Einheitsvektor $\vec{e}(t)$ ist, der natürlich $\vec{e}(0) = \vec{e}$ erfüllt. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Polarkoordinaten $(\theta(t), \phi(t))$ von $\vec{e}(t)$, wobei (θ, ϕ) jene von \vec{e} sind! (1 Punkt)

d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Spinor in einem Zustand χ_0 , der bei einer Messung der Observablen $S_3 + \sqrt{3}S_1$ den Erwartungswert \hbar liefert. Berechnen Sie für $t \geq 0$ die Erwartungswerte $\vec{R}(t) \equiv (2/\hbar) \langle \vec{S} \rangle(t)$ und $\langle \vec{e} \cdot \vec{S} \rangle(t)$. (3 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung des Anfangszustandes χ_0 Aufgabe 29, und überlegen Sie in dem Zusammenhang zuerst welche Eigenwerte der Operator $S_3 + \sqrt{3}S_1$ hat (s.a. Aufgabe 28). Das \vec{B} -Feld zeige wieder in die 3-Richtung.

5 + 2* Punkte