Professor Dr. H. A. Kastrup
Übungen zur Mechanik, WS 1997/98

Blatt 12, **Abgabetermin: 6.02.98**

Aufgabe 34 **Niveauunterschied**

Ein Fluß der Breite d fließt auf der Nordhalbkugel der Erde mit der Geschwindigkeit v_0 nach Norden. Man bestimme den Unterschied zwischen dem Wasserstand des westlichen umd dem des östlichen Ufers in Abhängigkeit von der geographischen Breite λ. Benutzen Sie die Werte $d = 1km$, $\lambda = 30°$ und $v_o = 6km/h$.

Bemerkung: In Ost–West–Richtung kann die Wasseroberfläche in guter Näherung als geradlinig angenommen werden. Der Abstand eines Punktes der Wasseroberfläche zum Erdmittelpunkt kann außerdem näherungsweise gleich dem Erdradius $R_E \approx 6400km$ gesetzt werden.

4 Punkte

Aufgabe 35 **Billardkugel**

Eine homogene Kugel mit Radius R und Masse M bewegt sich rollend und gleitend auf einer horizontalen Ebene (Flächennormale $\vec{e}_z$; siehe Abb. A). Im jeweils momentanen Berührpunkt wirkt eine Reibungskraft $-\mu\vec{v}_{gleit}$, wobei die Gleitgeschwindigkeit $\vec{v}_{gleit}(t)$ die Geschwindigkeit eben dieses Berührpunktes relativ zur Unterlage ist. Bezeichne nun $\vec{v}(t)$ die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes und $\vec{\omega}(t)$ den Drehvektor der Kugel um ihren Mittelpunkt.

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Impuls und den Drehimpuls auf! Bestimmen Sie daraus $\vec{\omega}(t)$ als Funktion von $\vec{v}(t)$ und den Anfangsdaten! Berechnen Sie dann $\vec{v}(t)$! Die Anfangsdaten seien: $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ mit $\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_z = 0$ und $\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0$.

Hinweis: Der zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen vorhandene Zusammenhang von $\vec{v}_{gleit}$ mit $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ wird zur Bestimmung von $\vec{\omega}(t)$ noch *nicht* benötigt, sondern geht erst in die Berechnung von $\vec{v}(t)$ ein.
Zur Form von $\vec{v}_{gleit}$ überlegen Sie sich: Gegeben sei ein $\vec{\omega}(t)$; bei welchem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{roll}(t)$ würde die Kugel gleitfrei rollen (*reine* Rollbewegung $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_{gleit} = 0$)? Im allgemeinen gilt dann: $\vec{v}_{gleit} = \vec{v} - \vec{v}_{roll}$.

Bonusfrage: Wie hoch über dem Schwerpunkt muß der Queue eine anfangs ruhende (und spinlose) Billiardkugel horizontal anstoßen, damit die Kugel nur rollt ($\vec{v}_{gleit} = 0$)?

4+1* Punkte

Aufgabe 36 **Zylinder mit exzentrischer Bohrung**

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ_{voll} eines *Vollzylinders* (Länge L, Radius r, konstante Massendichte ρ_0) um dessen Symmetrieachse. *0.5 Punkte*

b) Welche Zusatzterme erhält die Lagrangefunktion von Aufgabe 26 b), wenn man die Masse m_R der (homogenen) Rolle nicht vernachläßigt? 1 *Punkt*

Betrachten Sie nun den in der Abbildung B gegebenen *Zylinder mit Bohrung*: Er besteht aus einem Vollzylinder (Länge L, Radius R, konstante Massendichte ρ_0), in den eine zylindrische Bohrung mit Radius $R/2$ angebracht ist.

c) Bestimmen Sie die Gesamtmasse M des *Zylinders mit Bohrung*, sowie die Schwerpunktskoordinate z_s! Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\Theta = \alpha M R^2$ des *Zylinders mit Bohrung* bezogen auf eine durch den Schwerpunkt S verlaufende Parallele zur y-Achse ($\bar{y}$-Achse in der Abbildung, $\Theta \equiv \Theta_{\bar{y}\bar{y}}$)! *1.5 Punkte*

Hinweis: Zur Bestimmung der Schwerpunktskoordinate z_s und des Gesamtträgheitsmomentes Θ benutze man das Superpositionsprinzip: Nach Definition sind z_s und Θ linear in der Massendichte ρ. Daher ist es möglich, den *Zylinder mit Bohrung* als einen Vollzylinder mit Radius $r = R$ aufzufassen, von dem ein weiterer Vollzylinder mit Radius $r = R/2$ „subtrahiert" wird. Θ berechnet sich dann mit Hilfe des Satzes von Steiner.

d) Der *Zylinder mit Bohrung* könne (nur) Rollbewegungen längs der x-Achse ausführen. Benutzen Sie als verallgemeinerte Koordinate die x-Koordinate des Mittelpunktes des äußeren Zylinders. (Dies ist gleich der x-Koordinate des momentanen Berührpunktes mit der Auflage und ebenso gleich dem Abrollweg des äußeren Zylindermantels). $x = 0$ bezeichne den ursprünglichen Auflagepunkt (siehe Abbildung). Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(x, \dot{x})$ des Systems. *1 Punkt*

Bemerkung: Die Energie des *Zylinders mit Bohrung* sei kleiner als jener Wert, der zu einem zwischenzeitlichen Abheben des Zylindermantels von der Auflage führt. — Der Unterpunkt d), sowie der folgende, freiwillige Teil e)*, kann auch ohne die Kenntnis von α aus Teil c) gelöst werden.

e)* Zeichnen Sie ein qualitatives Phasendiagramm $(x, \dot{x})$ inklusive Kennzeichnung der Gleichgewichtspunkte und der periodischen Bahnen. Finden Sie die Lösung der Bewegungsgleichung (implizit und in der Form eines Integrals genügt)! 1^* *Bonuspunkt*

4+1* Punkte