Übungsblatt 12 zur Vorlesung Relativistische Quantentheorie

J. Jersák, SS 2002

Aufgabe 40 (nicht explizit kovariante Form der Dirac-Gleichung)(1 Punkt)
In der Vorlesung →3.4(5) wurde die γ-Algebra in der *Weyl-Darstellung* (= *chirale Darstellung*) verwendet:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Geben Sie einen unitären Basiswechsel $U \in \mathbf{C}^{4\times4}$ an, so daß für die transformierten Matrizen $\gamma^\mu_U := U^{-1}\gamma^\mu U$ die Matrix γ^0_U diagonal wird. Wie lauten die γ^μ_U?
2. Wie ist U zu wählen, damit man die *Dirac-Darstellung* →5.16(1)(2)
$$\hat\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \hat\gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix} \tag{2}$$
erhält?
3. In der Vorlesung wurden $\beta := \hat\gamma^0$ und $\alpha^k := \hat\gamma^0\,\hat\gamma^k$ definiert →5.19(1)(2). Berechnen Sie $\{\alpha^j, \alpha^k\}$, $\{\alpha^j, \beta\}$ und $\{\beta, \beta\}$.

Aufgabe 41 (Dirac-Gleichung für ein Antiteilchen)(1 Punkt)
Welche Form hat die Dirac-Gleichung für die Ein-Teilchen-Wellenfunktion im äußeren Feld, wenn man anstelle eines Teilchens →5.15(2) ein Antiteilchen betrachtet (vgl. →5.4(3) und →5.7(3))? Welche Ladung hat das Antiteilchen?

Aufgabe 42 (Relativistische Behandlung des Coulomb-Problems)(3 Punkte)
Aus der Differentialgleichung für den Radialteil der Wellenfunktion →5.29(2) folgt mittels der Substitution →5.29(6) und des Ansatzes $u(r) = r^L\,e^{-\kappa r}\,w(r)$ mit geeignetem κ eine Gleichung, ähnlich der aus dem Schöller-Skript auf Seite 239 bzw. →(5) aus der Beilage zur Vorlesung ("Erinnerung an das H-Atom")(Achtung: die Konventionen weichen voneinander ab).

1. Wie lautet diese Gleichung?
2. Zeigen Sie, daß die *verallgemeinerten Laguerre-Polynome*
$$L_n^{(\alpha)}(z) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{z^k}{k!} \tag{3}$$
für $\alpha \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ mit dem Binomialkoeffizienten
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{4}$$
diejenigen Lösungen der Gleichung für $w(r)$ sind, für die die Wellenfunktion quadratintegrabel ist. Hinweis: Die verallgemeinerten Laguerre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung
$$z\,{L^{(\alpha)}}''_n(z) + (\alpha+1-z){L'}^{(\alpha)}_n(z) + nL_n^{(\alpha)}(z) = 0. \tag{5}$$

3. In welchen Fällen ist der Radialteil der Wellenfunktion für $r \to 0$ unbeschränkt? Wie läßt sich das verstehen?

Aufgabe 43 (Landau-Niveaus)(2 Punkte)
Berechnen Sie das Energiespektrum eines Dirac-Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{e}_3$.

Hinweis: Verwenden Sie das Vektorpotential $A^0 = 0$, $\mathbf{A} = (0, Bx^1, 0)$ und leiten Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Ein-Teilchen-Wellenfunktion her, die eine Separation der kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 erlaubt.

Besprechung: Di. 16.07., 15:45 Uhr, 28A102.
Übungsleiter: D. Seidel.